E. I 4.

19161

59.

Lehrbuch

der

höhern Analysis,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Vierter Theil,

Fortsetzung der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen.

Berlin, 1832.

In Jonas' Verlagsbuchhandlung,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Sechster Theil,

Fortsetzung der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen.

Berlin, 1832.

In Jonas' Verlagsbuchhandlung,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Vorrede.

Es ist dem Verfasser nicht möglich geworden, in dem gegenwärtigen 6ten Theil des Systems bereits die Integration der Parzialgleichungen, in endlicher Form, mit aufzunehmen. Diese wichtigen Lehren bilden daher die erstere Hälfte des 7ten Theils dieses Systems, welcher zu Anfang des nächsten Jahres erscheinen wird. In demselben 7ten Theile wird dann zugleich auf wenigen Blättern die allgemeine Lehre vom Größten und Kleinsten gegeben werden, weil der Verfasser hinsichtlich des Details auf seine bereits im Jahre 1825 erschienene „Lehre vom Größten und Kleinsten" sich beziehen kann. Dagegen soll dem 7ten Theil noch eine Sammlung von Beispielen aus der Lehre vom Größten und Kleinsten beigegeben werden, welche zu gleicher Zeit bestimmt ist, ein bereits vor 8 Jahren in der Vorrede zu dem angeführten Werke gegebenes Versprechen we-

nigstens zum Theil zu erfüllen, und welche dem Anfänger eben sowohl eine nothwendige Erleichterung des Studiums dieser Lehre gewähren, als auch Gelegenheit geben wird, die Lehren der höhern Analysis überhaupt, wie sie im 5ten, 6ten und 7ten Theile dieses Systems vorgetragen sich finden, in ihrer Anwendung näher erörtert zu sehen. — Andere, vorzüglich geometrische Uebungs-Aufgaben werden den Beschluß des 7ten Theils ausmachen.

Berlin im September 1832.

Dr. M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des sechsten Theils.

Funfzehntes Kapitel.

Von einigen Formen identischer Differenzial- und solcher identischen Gleichungen, welche auch noch Integrale enthalten; namentlich Zerlegung derselben in mehrere einzelne Gleichungen. (§§. 328.—338.) . Pag. 1—11.

Sechszehntes Kapitel.

Von der Integration der Ausdrücke mit Ableitungen (der Differenzialfunktionen), welche nur zwei Veränderliche enthalten. Bedingungsgleichungen der Integrabilität. Von den integrirenden Faktoren oder Multiplikatoren. Integration der Ableitungs- (Differenzial-) Gleichungen zwischen nur zwei Veränderlichen, in endlicher Form. (§§. 339.—360.) . . . . . Pag. 12—138.

Erste Abtheilung. Von der unmittelbaren Integration der Differenzialfunktionen oder der Differenzialgleichungen, welche nur zwei Veränderliche enthalten, ohne oder mit einem integrirenden Faktor. (§. 339.—§. 350.) . . . . . Pag. 12—75.

§. 339. Man soll $U = \int V \cdot dx$ finden, wenn V eine Funktion von x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^n y_x$ ist, und y_x

gänzlich unbestimmt und beliebig bleiben soll. Bedingungsgleichung der Integrabilität.
§. 339b. Noch eine andere Auflösung derselben Aufgabe.
§§. 340.—342. Spezielle Fälle.
1) Wenn $V = M + N \cdot \partial y_x$ ist. (§. 340.)
2) Sind dabei die Variablen getrennt, so ist die Bedingungsgleichung der Integrabilität allemal erfüllt. (§. 341.).
3) Wenn $V = Q + P \cdot \partial^2 y_x$ ist. (§. 342.)
§. 343. Ist $V = 0$, so ist $U = c$.
§. 344. Aufsuchung des integrirenden Faktors für die Funktion V.
§. 345. Integration der Gleichung $V = 0$ mittelst des integrirenden Faktors.
§. 346. Zusammenhang aller integrirenden Faktoren.
§§. 347.—349. Spezielle Fälle.
1) Wenn $V = M + N \cdot \partial y_x$ (§. 347.); 2) wenn $V = Q + P \cdot \partial^2 y_x$ (§. 348.); 3) wenn V zwar von der nten Ordnung aber lineär ist. (§. 349).
§. 350. Von den 2ten und höhern Integralen einer solchen Funktion V des (§. 339.).

Zweite Abtheilung. Von der Integration der Differenzialgleichungen zwischen nur zwei Veränderlichen mittelst Transformation. (§§. 351.—359.) . . . . . Pag. 75—129.

§. 351. Zuerst wird die Unabhängigkeit von x auf y geworfen.
§. 352. Dann wird die Unabhängigkeit von x auf irgend einen dritten Veränderlichen geworfen.
§. 353. Nun wird ein neuer Veränderlicher v dergestalt eingeführt, daß man statt einer Gleichung zwischen x und y jetzt eine Gleichung zwischen x und v oder zwischen y und v erhält.
§. 354. Wie die einzuführende Gleichung glücklich gewählt werden muß.
§. 355. Die Gleichung, durch welche der neue Veränderliche eingeführt wird, kann selbst noch Ableitungen enthalten.
§. 356. Es kann auch ein neuer Veränderlicher so einge-

führt werden, daß man zu einer integrirbaren Gleichung zwischen drei Veränderlichen gelangt.

§. 357. Nun werden zwei neue Veränderliche durch zwei Gleichungen eingeführt. Anmerkg. Auch mehr als 2 neue Veränderliche können eingeführt werden.

§. 358. Besondere Fälle der Anwendung dieser Methode.

§. 359. Man braucht nicht beide Gleichungen auf einmal zu wählen, sondern man kann zwei neue Veränderliche zuerst durch eine Gleichung einführen, nachher erst die 2te Gleichung so nehmen, daß die Endgleichung die möglich einfachste werde.

Dritte Abtheilung. Noch eine besondre Integrationsmethode für Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen. (§. 360.) Pag. 129—138.

Siebenzehntes Kapitel.

Betrachtung einiger besonderen Fälle der Integration der Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen. (§§. 361.—389.) Pag. 139—229.

Erste Abtheilung. Integration der lineären Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. (§§. 361.—377.) . . . . . Pag. 139—185.

§. 361. Erklärung der lineären Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen.

§. 362. Bestimmung der allgemeinen Form des Integrals einer solchen Gleichung.

§. 363. Integrationsversuch mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

A. Integration der reduzirten lineären Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

§§. 364. 365. Es wird das allgemeine Ur-Integral einer solchen lineären Gleichung mit konstanten Koeffizienten gefunden. Die Form desselben hängt ab von den gleichen oder ungleichen Wurzelwerthen einer höhern Gleichung $f_m = 0$.

§. 366. Umformung des Integrals, wenn diese Gleichung $f_m = 0$ zwei imaginäre Wurzelwerthe hat.

§. 367. Wenn $f_m = 0$ gleiche und imaginäre Wurzelwerthe hat.

§. 368. Spezielle Betrachtung aller Fälle, welche bei einer lineären und reduzirten Differenzialgleichung der 2ten Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorkommen können.

B. Integrations-Versuche der reduzirten lineären Gleichung mit variablen Koeffizienten. (§. 369.)

C. Von der Integration der vollständigen lineären Gleichung mit konstanten oder veränderlichen Koeffizienten.

§§. 370—374. Des Lagrange Methode der Variation der Konstanten, um aus dem Integral der reduzirten Gleichung das der vollständigen zu erhalten.

§. 375. Die Laplace'sche Methode zu demselben Zwecke.

D. Bestimmung der Konstanten nach gegebenen speziellen Werthen der Ableitungen. (§§. 376. 377.)

Zweite Abtheilung. Von der gleichzeitigen Integration mehrerer Integralgleichungen, besonders der lineären. (§§. 378.—380.) Pag. 185—229.

A. Gleichzeitige Integration gegebener lineärer Gleichungen.

§. 378. Verschiedene lineäre Gleichungen der 1sten und der 2ten Ordnung gleichzeitig integrirt.

§. 379. Das von Ampére dargestellte Verfahren des d'Alembert.

B. Von der gleichzeitigen Integration einiger anderen Differenzialgleichungen. (§. 380.).

Dritte Abtheilung. Noch einige besondere Betrachtungen über das Auffinden der integrirenden Faktoren. (§§ 381—389.)

A. Versuche den integrirenden Faktor aus bekannten besondern Integralen oder singulären Werthen zu finden (Methode des Trembley.) (§§. 381—384.)

B. Versuche den integrirenden Faktor einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung in besondern Fällen zu finden. (§§. 385. 386.)

C. Versuche, zusammengehörige Differenzialgleichungen und integrirende Faktoren zu finden, wenn beide bloß der Form nach gegeben sind.

§§. 387. 388. Bei Gleichungen der ersten Ordnung.
§. 389. Bei Gleichungen der zweiten Ordnung.

Achtzehntes Kapitel.

Von der Integration der Ausdrücke mit Ableitungen (der Differenzialfunktionen), welche drei oder mehr Veränderliche enthalten. Bedingungsgleichungen der Integrabilität. Von den hieher gehörigen integrirenden Faktoren oder Multiplikatoren. Integration der totalen Differenzialgleichungen zwischen drei und mehr Veränderlichen. Wie den letztern durch mehrere Urgleichungen mit willkührlichen Funktionen genügt wird. (§§. 390—427.) . . . . . Pag. 230. — Ende.

Erste Abtheilung. Fortsetzung der Lehren der 1sten Abtheilung des sechszehnten Kapitels; d. h. Ausdehnung jener Lehren auf den Fall, daß drei oder mehr Veränderliche eingehen. (§§. 390.—409.) . . . . . Pag. 230—290.

§. 390. Erklärung der totalen Differenzialgleichung.
§. 391. Folgerungen daraus.

A. Integration der Differenzialfunktionen und der totalen Differenzialgleichungen mit drei Veränderlichen.

§. 392. Die Aufgabe des (§. 339.), wenn V auch noch $z, \partial z_x, \dots \partial^m z_x$ enthält.

§. 393. Spezielle Fälle: 1) wenn V von der 1sten Ordnung nur ist, 2) wenn $V = P \cdot \partial y_x^2 + Q \cdot \partial y_x \cdot \partial z_x + R \cdot \partial z_x^2 + S \cdot \partial^2 y_x + T \cdot \partial^2 z_x$ ist.

§. 394. Bedingungsgleichung für die Existenz eines μten Integrals.

§. 395. Von den integrirenden Faktoren für die allgemeine Funktion V.

§§. 396. 397. Für spezielle Fälle: 1) wenn V von der 1sten Ordnung und namentlich von der Form $Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X$ ist (§. 396.), 2) wenn die Veränderlichen getrennt werden können (Anmerkg.); endlich 3) wenn die gegebene Funktion V nicht bloß nach y,

sondern auch nach z und deren Ableitungen linear ist. (§. 397.)

§. 398. Allgemeine erste, zweite, ꝛc. ꝛc Integrale einer Differenzialgleichung zwischen 3 Veränderlichen.

§. 399. Gleichzeitige Integration zweier solchen Gleichungen.

§. 400. Direkte Auffindung des mten Integrals einer gegebenen totalen Differenzialgleichung $V=0$ zwischen 3 Veränderlichen, von der nten Ordnung nach y, und mten Ordnung nach z, ohne durch die Zwischen-Integrale hindurch gehen zu müssen.

§§. 401. 402. Spezielle Fälle, wenn $m=1$ (§. 401) oder $n=m=1$ (§. 402.).

§. 403. Die Aufgabe des (§. 400.) nach Lagrange durch Variationsrechnung behandelt.

§. 440. Diese Methode der (§§. 400.—403.) giebt in den Fällen, wo kein allgemeines mtes Integral existirt, die etwa existirenden besonderen Auflösungen.

§. 405. Ist $m=1$, und findet sich nach (§. 400.) ein allgemeines Integral, so hat auch V einen integrirenden Faktor ξ.

§. 406. Dasselbe für die Gleichung $Z\cdot\partial z_x+Y\cdot\partial y_x+X=0$ des (§. 402.).

B. Integration der Differenzialfunktionen und der totalen Differenzialgleichungen zwischen vier und mehr Veränderlichen.

§. 407. Ausdehnung der (§§. 392.—399.).

§. 408. Ausdehnung der (§§. 400—406.).

C. Betrachtung derselben in (A.) und in (B.) geführten Untersuchungen, wenn man sich überall den unabhängigen Veränderlichen x selbst wieder als abhängig denkt. (§. 409.)

Zweite Abtheilung. Wie einer totalen Differenzialgleichung, wenn sie nicht ein allgemeines Integral hat, doch durch Systeme von 2 oder mehr Gleichungen genügt werden kann, welche willkührliche Funktionen in sich aufnehmen, und deshalb einige Allgemeinheit haben. (§§. 410.—427.) . Pag. 291.—Ende

Erste Unterabtheilung. Wenn die gegebene Differen-

zialgleichung von der ersten Ordnung und auch bloß von der Form $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + U \cdot \partial u + \ldots = 0$ ist.

A. Wenn die Gleichung nur drei Veränderliche enthält, also bloß die Form $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$ hat.

§§. 410. 411. Monge's genügende Systeme zweier Urgleichungen; nebst Bemerkungen dazu.

§. 412. Pfaff's Verfahren, um wo möglich diese dreigliedrige Gleichung auf eine 2 gliedrige zurückzuführen.

B. Wenn die gegebene Gleichung vier Veränderliche enthält.

§. 413. Systeme dreier Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

§. 414. Systeme zweier Urgleichungen, welche ebenfalls genügen. (Pfaff's Verfahren.)

C. Wenn die gegebene Differenzialgleichung fünf Veränderliche enthält.

§. 415. Systeme von vier Urgleichungen, welche genügen.

§. 416. Systeme von drei genügenden Urgleichungen.

D. Wenn die gegebene Differenzialgleichung sechs Veränderliche enthält.

§. 417. Systeme von 5, 4 und 3 Urgleichungen, welche genügen.

E. Wenn die gegebene Differenzialgleichung sieben Veränderliche enthält.

§. 418. Systeme von 6, 5 und 4 Urgleichungen, welche genügen.

F. Wenn die Anzahl der Veränderlichen $p+1$ ist.

§§. 419.—421. Die Pfaff'sche Methode die Gleichung auf eine andere zwischen nur p Veränderlichen zurückzuführen; nebst der eleganteren Rechnung des Jacobi.

§. 422. Das Pfaff'sche, von Jacobi noch verallgemeinerte Verfahren, der gegebenen Differenzialgleichung durch die kleinstmöglichste Anzahl von Urgleichungen zu genügen.

§. 423. Verbindung der Pfaff'schen Methode mit der des Monge, um jede größere Zahl genügender Urgleichungen zu finden, während die Monge'sche Methode allein, die größeste Zahl p von genügenden Urgleichungen liefert.

Zweite Unterabtheilung. Wenn die gegebene Differenzialgleichung die bis jetzt vorausgesetzte, nach den Ableitungen ∂z, ∂y, ∂x ꝛc. ꝛc. lineäre Form nicht hat, oder gar nicht von der ersten Ordnung ist. (§§. 424.—427.)

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Differential- und Integral-Rechnung.

x in

Sn d

waren nun

Kapitel (im V

jede beliebige

jede beliebige

möchte, richtig

nach denjeni

Höhere Zahlenlehre.

Fünfzehntes Kapitel.

Von einigen Formen identischer Differenzial- und solcher identischen Gleichungen, welche auch Integrale enthalten; namentlich Zerlegung derselben in mehrere einzelne Gleichungen.

Vorerinnerung.

In den frühern Theilen dieses Systems haben wir gezeigt, daß jede Gleichung eine identische seyn muß, und daß man eben dann zur Algebra geführt wird, so oft man wünscht zu wissen, unter welcher Voraussetzung z. B. die an sich nicht richtige Gleichung $ax+b=0$ zu einer richtigen (identischen) wird, (nämlich unter der Voraussetzung, daß x grade den bestimmten Ausdruck $-\frac{b}{a}$ bedeutet und vorstellt). Solche Gleichungen (wie hier $ax+b=0$), die bloß in der Form, nicht aber dem Wesen nach, von den einzig existirenden (identischen) Gleichungen verschieden sind, nannten wir Bestimmungsgleichungen, weil sie in der Regel den unbekannten Ausdruck bestimmen, den der Buchstabe x in ihnen repräsentirt.

In diesem letztern Sinne, d. h. als Bestimmungsgleichungen, waren nun auch die Differenzialgleichungen der drei vorhergehenden Kapitel (im V. Th. d. Systems) aufgefaßt, in so ferne sie nicht für jede beliebige Funktion von x, welche statt y, z, und nicht für jede beliebige Funktion von x und y, welche statt u gesetzt werden möchte, richtig verbleiben sollten, sondern weil im Gegentheil grade nach denjenigen Funktionen gefragt worden ist, welchen diese Eigenschaft

[die Gleichungen in wirkliche (identische) zu verwandeln] allein zukommt. Alle diese, zur Rubrik der drei letztern Kapitel gehörigen Gleichungen, sind also mit Recht Differenzial-Bestimmungsgleichungen zu nennen, und von den rein identischen, von denen einige Formen nun in diesem Kapitel näher betrachtet werden sollen, wohl zu unterscheiden.

§. 328. Lehrsätze.

Findet die Gleichung

(I.)... $A+A_0 \cdot y_x+A_1 \cdot \partial y_x+A_2 \cdot \partial^2 y_x+\ldots+A_n \cdot \partial^n y_x=0$

statt für jede Funktion von x, die statt y gesetzt werden mag, so sind die Koefficienten A_0, A_1, A_2, ... A_n alle einzeln der Null gleich, also daß auch $A=0$ ist.

Denn wäre irgend einer dieser Koeffizienten nicht $=0$, so wäre die Gleichung von der Form derer, die im (Kapitel XII. d. V. Th. d. S.) behandelt worden sind, würde also nur durch eine bestimmte Funktion, höchstens mit n willkührlichen Konstanten, mithin nicht mehr durch jede beliebige Funktion von x, identisch, wenn solche statt y gesetzt wird.

Anmerkung. Aus diesem Beweise geht zugleich hervor, daß jeder einzelne der Koeffizienten A, A_0, A_1, ... A_n bereits Null seyn müsse, sobald nur zur Bedingung gemacht wird, daß die gegebene Gleichung (I.) für eine Funktion von x mit mehr als n von einander unabhängigen willkührlichen Konstanten, statt y gesetzt, identisch werden soll.

§. 329. Zusatz.

Findet dagegen statt die Gleichung *)

(II.)...

$$\left\{\begin{array}{l} [A_x]_a+A_0 \cdot [y_x]_a+A_1 \cdot [\partial y_x]_a+\ldots+A_m \cdot [\partial^m y_x]_a \\ +[B_x]_b+B_0 \cdot [y_x]_b+B_1 \cdot [\partial y_x]_b+\ldots+B_n \cdot [\partial^n y_x]_b \\ +[C_x]_c+C_0 \cdot [y_x]_c+C_1 \cdot [\partial y_x]_c+\ldots+C_p \cdot [\partial^p y_x]_c \end{array}\right\}=0$$

*) Wegen der Bedeutung der Zeichen sehe man (§. 204. d. V. Th. d. S.). Danach bedeutet $[\partial^n y_x]_b$ z. B. den Werth, den die Funktion $\partial^n y_x$ annimmt, wenn b statt x gesetzt wird.

für jede beliebige Funktion y_x, so müssen die Koeffizienten

$$A_0, A_1, A_2, \cdots A_m, B_0, B_1, \cdots B_n, C_0, C_1, \cdots C_p$$

jeder einzeln für sich der Null gleich seyn, also daß auch

$$[A_x]_a + [B_x]_b + [C_x]_c = 0 \text{ ist.}$$

Denn man nehme statt y eine Funktion von x mit wenigstens $m+n+p+4$ von einander unabhängigen Konstanten, so lassen sich diese Konstanten allemal anders und anders nehmen und zugleich auch so, daß die $m+n+p+3$ Ausdrücke $[y_x]_a$, $[\partial y_x]_a$ ꝛc. ꝛc. alle $= 0$ werden, weshalb $[A_x]_a + [B_x]_b + [C_x]_c = 0$ seyn muß. Läßt man aber diese 3 Glieder aus der (II.) weg, so kann man wiederum den willkührlichen Konstanten solche Werthe beilegen, daß von den $m+n+p+3$ Ausdrükken $[y_x]_a$, $[\partial y_x]_a$, ꝛc. ꝛc. ꝛc. alle bis auf einen einzigen der Null gleich werden, dieser einzige aber, welcher nicht Null wird, einen bestimmten Werth erhalte. Dann könnte die Gleichung (II.) nicht bestehen, wenn nicht der Koeffizient des letztern $= 0$ wäre. Und da dieser letztere jeder der gedachten Ausdrücke werden kann, so müssen alle Koeffizienten einzeln der Null gleich seyn. *)

Anmerkung. Daß auch der analoge Satz noch gilt, wenn in der gegebenen Gleichung noch beliebig viele Glieder von der Form $D_0 \cdot [y_x]_m$, $E_0 \cdot [y_x]_n$, $D_1 \cdot [\partial y_x]_m$ ꝛc. $E_1 \cdot [\partial y_x]_n$, ꝛc. ꝛc. vorkommen, fällt leicht in die Augen.

§. 330. Lehrsatz.

Findet statt die Gleichung

$$\text{(III.)} \cdots \left\{ \begin{array}{l} A + A_0 \cdot y_x + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_n \cdot \partial^n y_x \\ + B_0 \cdot [y_x]_a + B_1 \cdot [\partial y_x]_a + B_2 \cdot [\partial^2 y_x]_a + \cdots \\ \qquad + B_m \cdot [\partial^m y_x]_a \end{array} \right\} = 0$$

für jede beliebige Funktion y_x, so müssen die Koeffizienten A, $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n, B_0, B_1, \cdots B_m$, jeder für sich, der Null gleich seyn.

---

*) Um von ersten Anfängern nicht mißverstanden zu werden, bemerken wir hier noch ausdrücklich, daß die Koeffizienten, der Voraussetzung zu Folge, von y ganz unabhängig sind, und für keine der verschiedenen Funktionen von x, welche statt y gesetzt werden, ihren Werth, den sie einmal haben, ändern können. Ist daher einmal gefun-

Beweis. Denn man setze statt y_x eine Funktion von x mit einer hinreichenden Anzahl willkührlicher Konstanten, um durch schickliche Bestimmung der letztern für irgend einen bestimmten Werth α von x, alle Glieder der Gleichung bis auf eines verschwinden zu lassen; so könnte die Gleichung nicht bestehen, wenn nicht der Koeffizient dieses letztern $= 0$ wäre. Und da dieses letztere jedes der $m+n+3$ Glieder der Gleichung werden kann, so muß nothwendig auch jeder einzelne Koeffizient der Null gleich seyn. *)

Anmerkung. Daß derselbe Satz auch dann noch gilt, wenn in der gegebenen Gleichung (III.) noch überdieß Glieder von der Form $C_0 \cdot [y_x]_b$, $C_1 \cdot [\partial y_x]_b$, 2c. 2c. $D_0 \cdot [y_x]_c$, $D_1 \cdot [\partial y_x]_c$, 2c. 2c. vorkommen, fällt in die Augen.

§. 331. Lehrsatz.

Ist gegeben die Gleichung

$$(IV.) \cdots \left\{\begin{matrix} A + A_0 \cdot y_x + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_m \cdot \partial^m y_x \\ + B_0 \cdot z_x + B_1 \cdot \partial z_x + B_2 \cdot \partial^2 z_x + \cdots + B_n \cdot \partial^n z_x \end{matrix}\right\} = 0,$$

oder die Gleichung

$$(V.) \cdots \left\{\begin{matrix} A_0 \cdot y_x + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_m \cdot \partial^m y_x \\ + B_0 \cdot z_x + B_1 \cdot \partial z_x + B_2 \cdot \partial^2 z_x + \cdots + B_n \cdot \partial^n z_x \\ + C_0 \cdot [y_x]_a + C_1 \cdot [\partial y_x]_a + \cdots + C_p \cdot [\partial^p y_x]_a \\ + D_0 \cdot [z_x]_b + D_1 \cdot [\partial z_x]_b + \cdots + D_q \cdot [\partial^q z_x]_b \end{matrix}\right\} = 0,$$

unter der Voraussetzung, daß solche statt finden soll für jede beliebige Funktion von x, welche statt y_x, und zugleich auch für jede beliebige, von der erstern unabhängige Funktion von x, welche statt z_x gesetzt werden mag; so müssen alle Koeffizienten einzeln der Null gleich seyn.

---

den worden, daß sie $= 0$ sind, für irgend ein y, so sind sie immer $= 0$, auch für jedes andere y.

*) Man könnte hier glauben, daß A_0, A_1, A_2, $\cdots A_m$, B_0, B_1, B_2, $\cdots B_n$, Funktionen von x seyn, und für $x = \alpha$ der Null gleich werden könnten, ohne deswegen für jeden andern Werth von x (identisch) der Null gleich zu seyn. Denkt man aber daran, daß α selbst beliebig genommen werden kann, so sieht man auch diesen Zweifel sogleich gehoben.

Der Beweis ist, den vorhergegangenen Beweisen analog, leicht zu führen.

Anmerkung. Daß derselbe Satz auch gilt, wenn in (IV. oder V.) noch mehr solche Glieder, etwa $C'_0 \cdot u_x + C'_1 \cdot \partial u_x + \cdots$ oder $D'_0 \cdot [u_x]_c + D'_1 \cdot [\partial u_x]_c + \cdots$ vorkommen sollten, fällt in die Augen.

§. 332. Lehrsatz.

Und ist gegeben die Gleichung

$$\text{(VI.)} \cdots \left.\begin{aligned} A + A_0 \cdot u + A_1 \cdot \partial u_x + A_2 \cdot \partial^2 u_x \quad + \cdots \\ + B_1 \cdot \partial u_y + B_2 \cdot \partial^{1,1} u_{x,y} + \cdots \\ + C_2 \cdot \partial^2 u_y \quad + \cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

für jede Funktion von x und y, welche statt u gesetzt werden mag, so sind alle Koeffizienten einzeln der Null gleich.

Beweis wie die der vorhergehenden ähnlichen Sätze.

§. 333. Zusatz.

Es ist zu gleicher Zeit sehr leicht einzusehen, wie solche Sätze, die denen in den (§§. 329.—332.) analog sind, noch in beliebiger Menge hingestellt und auf ähnlichem Wege wie bisher erwiesen werden können.

Daher wollen wir nun zu Lehrsätzen von etwas anderer, wenn auch immer hieher gehöriger Art übergehen.

§. 334. Lehrsatz.

Ist gegeben die Gleichung

$$\text{(I.)} \cdots \qquad \int_{b \div a} A_x \cdot z_x \cdot dx = 0$$

für jede beliebige Funktion z_x, so ist auch

$$A_x = 0,$$

wenn nur b von a verschieden ist.

Beweis. Denn wäre A_x nicht $= 0$, so könnte man $\frac{1}{A_x}$ statt z_x setzen, und man hätte dann aus (I.)

$$\int_{b \div a} A_x \cdot \frac{1}{A_x} \cdot dx = b - a = 0,$$

welches ein Widerspruch ist, weil, wie dieses vorausgesetzt worden, b von a noch verschieden seyn soll.

§. 335. Lehrsatz.

Ist gegeben die Gleichung

$$(II.)\cdots \int_{b\div a} A_x \cdot z_x \cdot dx + [P_x \cdot z_x]_\alpha + [P_x' \cdot \partial z_x]_\alpha + \cdots \left.\begin{array}{r} + [P_x^{(n)} \cdot \partial^n z_x]_\alpha \\ + [P_x \cdot z_x]_\beta + [P_x' \cdot \partial z_x]_\beta + \cdots \\ + [P_x^{(n)} \partial^n z_x]_\beta \end{array}\right\} = 0$$

für jede Funktion von x, welche statt z_x gesetzt werden mag; so ist erstlich.

$$A_x = 0,$$

und außerdem sind noch die Ausdrücke

$$[P_x]_\alpha,\ [P_x]_\beta,\ [P_x']_\alpha,\ [P_x']_\beta,\ \text{2c. 2c.}\ [P_x^{(n)}]_\alpha,\ [P_x^{(n)}]_\beta,$$

jeder für sich, der Null gleich.

Beweis. Man beweise zuerst, daß die letztern Koeffizienten $= 0$ sind, daß also die Gleichung (II.) in der That keine andere ist, als die Gleichung (I. des §. 334.), und der Satz wird erwiesen seyn.

Setzt man aber in (II.) statt z_x eine Funktion von x mit $2n+3$ willkührlichen und von einander unabhängigen Konstanten, so kann man eine dieser Konstanten so bestimmen, daß

$$\int_{b\div a} A_x \cdot z_x \cdot dx = 0$$

wird, und die übrigen Konstanten können nach und nach solche verschiedene Werthe annehmen, daß immer von den Ausdrücken

$$[z_x]_\alpha,\ [z_x]_\beta,\ [\partial z_x]_\alpha,\ [\partial z_x]_\beta,\ \text{2c 2c.}$$

alle bis auf einen einzigen der Null gleich werden, dieser einzige aber einen andern bestimmten Werth erhält, so daß die Gleichung (II.) nun nicht bestehen könnte, wenn nicht der Koeffizient dieses Gliedes $= 0$ wäre.

Also könnte die Gleichung (II.) für jedes z_x nicht bestehen, wenn nicht die Koeffizienten

$$[P_x]_\alpha,\ [P_x]_\beta,\ [P_x']_\alpha,\ [P_x']_\beta,\ \text{2c. 2c.}$$

alle, jeder für sich, der Null gleich wären, so daß die Gleichung (II.) in der That von der (I.) nicht verschieden ist, weshalb dann auch noch

$$A_x = 0$$

seyn muß.

§. 336. Zusatz.

Derselbe Satz würde auch unverändert statt finden, wenn die Gleichung (II.) nur für solche z_x jedesmal zu gelten hätte, welche gegebenen Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

zwischen

$$[z_x]_\alpha, \quad [z_x]_\beta, \quad [\partial z_x]_\alpha, \quad [\partial z_x]_\beta \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

genügen, wenn nur vorher mittelst dieser Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

aus der (II.) selbst so viele dieser Ausdrücke eliminirt worden sind, als deren durch diese Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

von den übrigen abhängig waren, so daß die Gleichung (II.) von denselben Ausdrücken

$$[y_x]_\alpha, \quad [\partial y_x]_\alpha, \text{ ꝛc. ꝛc.} \quad [y_x]_\beta, \quad [\partial y_x]_\beta \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

nur noch die unabhängigen behalten hat.

Man zeigt nämlich wieder zuerst, daß die Gleichung (II.) zunächst bloß auf

$$\int_{b \div a} A_x \cdot z_x \cdot dx = 0$$

sich zurückzieht. Weil aber diese Gleichung zwar für jede beliebige Form von z_x, aber nur unter der Voraussetzung statt finden soll, daß gewisse Konstanten in dieser Form dergestalt bestimmt worden sind, daß den Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, ꝛc. ꝛc. genügt wird, so muß jetzt auf eine andre Art, als im (§. 334.) geschehen ist, bewiesen werden, daß doch wiederum

$$\int_{b \div a} A_x \cdot z_x \cdot dx = 0$$

nicht bestehen könnte, wenn nicht $A_x = 0$ wäre.

Wäre nämlich nicht $A_x = 0$, so könnte man sich $z_x = \frac{\partial \pi_x}{A_x}$ denken, und es würde

$$\int_{b \div a} A_x \cdot z_x \cdot dx = [\pi_x]_{b \div a} = [\pi_x]_b - [\pi_x]_a = 0.$$

Da nun π_x mit so vielen willkührlichen Konstanten angenommen werden kann, daß $\frac{\partial \pi_x}{A_x}$ statt z_x gesetzt, nicht bloß den gegebenen Gleichun-

gen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ꝛc. ꝛc. genügt, sondern auch daß $[\pi_x]_b - [\pi_x]_a$ einen beliebig gegebenen Werth erhalten kann, so führt die Annahme, daß A_x nicht $= 0$ ist, zu dem Widerspruch, daß $[\pi_x]_b - [\pi_x]_a$ jeden beliebigen Werth haben kann, und doch allemal $= 0$ seyn muß. Also ist nothwendig auch jetzt noch $A_x = 0$.

§. 337. Lehrsatz.

Ist

$$\text{(III.)}\cdots \left.\begin{aligned} &\int_{b\div a} A_x \cdot y_x \cdot dx + \int_{b\div a} B_x \cdot z_x \cdot dx \\ &+[P_x \cdot y_x]_\alpha + [P_x' \cdot \partial y_x]_\alpha + \cdots \\ &+[P_x \cdot y_x]_\beta + [P_x' \cdot \partial y_x]_\beta + \cdots \\ &+[Q_x \cdot z_x]_\alpha + [Q_x' \cdot \partial z_x]_\alpha + \cdots \\ &+[Q_x \cdot z_x]_\beta + [Q_x' \cdot \partial z_x]_\beta + \cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

für jede beliebige Funktion von x, welche statt y_x, und für jede von der erstern unabhängige Funktion von x, welche statt z_x gesetzt werden mag; so muß

$$A_x = 0 \quad \text{und} \quad B_x = 0$$

seyn, und auch alle die Koeffizienten von

$$[y_x]_\alpha,\ [y_x]_\beta,\ [z_x]_\alpha,\ [z_x]_\beta,\ [\partial y_x]_\alpha \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

nämlich $[P_x]_\alpha$, $[P_x]_\beta$, $[P_x']_\alpha$ ꝛc. ꝛc. $[Q_x]_\alpha$, $[Q_x']_\alpha$ ꝛc. ꝛc. müssen dann einzeln der Null gleich seyn.

Beweis. Denn man setze statt z_x eine solche Funktion von x, für welche in (III.) alles herausfällt, was von z_x abhängig ist, so reduzirt sich die Gleichung (III.) auf die Gleichung (II.), und man hat also $A_x = 0$ und alle Koeffizienten der von y_x abhängigen Glieder sind nothwendig $= 0$. — Gerade so kann man aber auch verfahren, um den übrigen Theil der Behauptung außer Zweifel zu setzen, also namentlich auch, daß $B_x = 0$ ist.

§. 338. Zusatz.

Müßte diese Gleichung (III.) nicht für jedes y_x und z_x gelten, sondern nur für solche, zwischen deren zugehörigen Werthen

$$(\mathfrak{C})\cdots [y_x]_\alpha,\ [y_x]_\beta,\ [z_x]_\alpha,\ [z_x]_\beta,\ [\partial y_x]_\alpha, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

noch Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ꝛc. ꝛc. gegeben sind, so würde der Satz des (§. 337.) noch immer gelten, wenn man sich nur der Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ꝛc.

bedient hätte, um aus (III.) vorher alle diejenigen der Werthe in (C) zu eliminiren, welche vermöge der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

von denen in (III.) noch stehen und ganz unabhängig bleibenden, abhängig waren, sobald nur nicht zwischen y_x und z_x selber (als Funktionen von x, d. h. für jedes x) eine Abhängigkeit statt findet.

Anmerkung. Es ist leicht nach dem vorhergehenden ähnliche zusammengesetztere Sätze zu bilden und zu erweisen, theils solche von der früheren Form, so daß die gegebenen Gleichungen nur noch mehr solche Glieder enthalten, in welchen x konstante Werthe erhalten hat, oder noch mehr ganz unabhängige veränderliche Glieder; theils solche, in denen höhere Integrale erscheinen. Wir schließen daher dieses Kapitel, hinsichtlich weiterer und ausführlicherer Auseinandersetzungen auf Die Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin 1825. Einleitung. hinweisend.

Höhere Zahlenlehre.

Sechszehntes Kapitel.

Von der Integration der Ausdrücke mit Ableitungen (der Differenzialfunktionen), welche nur zwei Veränderliche enthalten. Bedingungsgleichungen der Integrabilität. Von den integrirenden Faktoren oder Multiplikatoren. Integration der Ableitungsgleichungen (der Differenzialgleichungen) zwischen nur zwei Veränderlichen, in endlicher Form.

Erste Abtheilung.

Von der unmittelbaren Integration der Differenzialfunktionen und der Differenzialgleichungen, welche nur zwei Veränderliche enthalten, ohne oder mit einem integrirenden Faktor.

§. 339. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Funktion V von x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x \cdots \partial^n y_x$, welche letztere Ableitungen beziehlich durch y_1, y_2, $\cdots y_n$ vorgestellt seyn mögen. Man soll eine Funktion U von

$$x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_{n-1}$$

finden, welche nach allem x abgeleitet (differenzirt) die Funktion V wiederum giebt, also daß

$$\partial U = V \qquad \text{und} \qquad U = \int V \cdot dx$$

ist, unter der Voraussetzung jedoch, daß ∂U die Ableitung nach allem x vorstellt, und daß y als eine völlig unbestimmte Funktion von x angesehen werden soll.

Auflösung.

I. Da

1) $$U = \int V \cdot dx$$

werden soll, während y als eine völlig unbestimmte Funktion von x gedacht ist, so muß diese Gleichung auch richtig verbleiben, wenn irgend eine andere Funktion $y_\varkappa$ statt y gesetzt wird; also muß auch

2) $$U_\varkappa = \int V_\varkappa \cdot dx$$

seyn, wenn $V_\varkappa$, $U_\varkappa$ die Reihen vorstellen, welche beziehlich aus V und U hervorgehen, wenn man die Reihe

3) $y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$ d. h. $y_\varkappa$ statt y,

also dann, welche ganze Zahl auch a vorstellen mag,

4) $\partial^a (y_\varkappa)_x$ statt $\partial^a y_x$

setzt, wo δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. ganz beliebige Funktionen von x vorstellen, während übrigens hier allemal und genau die Bezeichnung des (Kapitels XI. d. V. Th. d. S.) beibehalten wird. — Kann man nun die Koeffizienten δU, $\delta^2 U$, ꝛc. ꝛc. der Reihe $U_\varkappa$ oder

$$U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{2!} \cdot \delta^2 U + \cdots$$

finden, so hat man zuletzt die Differenz $U_\varkappa - U$ für jedes $\varkappa$ und für jedes δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. gefunden. Giebt man nachher dem $\varkappa$ und dem δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. solche bestimmte Werthe, daß außer der Differenz $U_\varkappa - U$ auch noch das zugehörige $U_\varkappa$ allein schon bekannt ist, so hat man das gesuchte U, weil solches $= U_\varkappa - (U_\varkappa - U)$ seyn muß, wirklich gefunden.

II. Nun ist aber nach (§. 244. d. V. Th. d. S.)

1) $$\delta U = \int \delta V \cdot dx;$$

und nach (§. 253. d. V. Th. d. S.), wenn y selbst auch durch y_0 vorgestellt wird,

2) $$\delta V = S\left[\partial V_{y_a} \cdot \partial^a \delta y\right]_{a+b=n} \text{ *)}$$

d. h. $\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial V_{y_2} \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + \partial V_{y_n} \cdot \partial^n \delta y$ **)

---

*) Man lese noch einmal das 17te Kap. d. II. Th. d. S. 2te Aufl.

**) Nach dem (11ten Kap. d. V. Th. d. S.) bedeuten hier die y, y_1, y_2, ꝛc. ꝛc. anfänglich unendliche, nach $\varkappa$ fortlaufende Reihen; weil

Also wird

3) $$\delta U = \int \left(S\left[\partial V_{y_a} \cdot \partial^a \delta y \right]_{a+b=n} \right) \cdot dx$$

d. h.

$$\delta U = \int (\partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial V_{y_2} \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + \partial V_{y_n} \cdot \partial^n \delta y) \cdot dx;$$

oder wenn man die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks zur Rechten, vom 2ten ab, theilweise integrirt, d. h. die Prinzipien der (§§. 225—228. d. V. Th. d. S.) auf sie anwendet,

4) $$\delta U = \int S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_a}) \right]_{a+b=n} \cdot \delta y \cdot dx + S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_{a+b+1}}) \cdot \partial^b \delta y \right]_{a+b+c=n-1},$$

d. h. wenn man die einzelnen Glieder schreibt, und dabei in dem 2ten Aggregat diejenigen Glieder zusammenfaßt, welche mit $\partial^b \delta y$ multiplizirt sind (dadurch, daß man statt b nach und nach 0, 1, 2, 3, ··· n—1 setzt, für jeden Werth von b aber die durch die Gleichung $a+b+c = n-1$ oder $a+c = n-1-b$ bestimmten Werthe von a dazu nimmt):

5) $$\begin{aligned}\delta U = \int & [\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) - \cdots \pm \partial^n(\partial V_{y_n})] \cdot \delta y \cdot dx \\ & + [\partial V_{y_1} - \partial(\partial V_{y_2}) + \partial^2(\partial V_{y_3}) - \cdots \mp \partial^{n-1}(\partial V_{y_n})] \cdot \delta y \\ & + [\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3}) + \cdots \pm \partial^{n-2}(\partial V_{y_n})] \cdot \partial \delta y \\ & + [\partial V_{y_3} - \cdots \mp \partial^{n-3}(\partial V_{y_n})] \cdot \partial^2 \delta y \\ & + \cdots\cdots \\ & + [\partial V_{y_n}] \cdot \partial^{n-1} \delta y,\end{aligned}$$

wo die bloßen ∂ vor den eingeklammerten Ausdrücken, Ableitungen nach allem x bedeuten.

Dieser Ausdruck für δU in (4.) oder (5.) enthält lauter schon integrirte Glieder bis auf das erste Aggregat (in 4.) oder die erste Zeile (in 5.), welche, während δy eine völlig beliebige Funktion von x bleibt, noch integrirt werden müßte. Weil aber dieser Theil die Form $\int P \cdot \delta y \cdot dx$ hat, wo P kein δy enthält, so existirt eine

---

aber zuletzt 0 statt x gesetzt wird, so reduziren sich letztere wieder auf ihre ersten Glieder y, y_1, y_2, ꝛc. ꝛc.

Funktion von x, y, y_1, y_2, $\cdots$ y_n und δy, welche nach allem x abgeleitet, $P \cdot \delta y$ geben, welche also $= \int P \cdot \delta y \cdot dx$ seyn könnte, offenbar nicht; in so ferne, wenn sie existirte, ihre Ableitung auch ein mit $\partial \delta y$ behaftetes Glied enthalten müßte. Also existirt δU ohne Integralzeichen, wie dies verlangt wird, nur unter der Bedingung, daß $P = 0$, d. h., daß

$$(\odot) \cdots \left\{ \begin{array}{l} S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_a})\right]_{a+b=n} = 0 \\ \text{oder} \\ \partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) - \cdots \pm \partial^n(\partial V_{y_n}) = 0 \end{array} \right\}$$

ist.

Ist daher diese Bedingungsgleichung $(\odot)$ von dem gegebenen V nicht erfüllt, so existirt kein δU ohne Integralzeichen, und dann auch kein U, so wie es gesucht wird, weil, wenn das letztere existirte, aus ihm nach (§. 253. d. V. Th. d. S.) sogleich δU entwickelt werden könnte, also letzteres ebenfalls existiren müßte, ohne eine bloß angezeigte Integration zu enthalten.

III. Ist aber die Bedingungsgleichung (II. $\odot$) von der gegebenen Funktion V erfüllt, so hat man in (II. 4. oder 5.) δU ohne Integralzeichen, also völlig entwickelt und hergestellt bereits gefunden, nämlich

$$1) \quad \delta U = S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+b+1}}) \cdot \partial^b \delta y\right]_{a+b+c=n-1}.$$

Weil aber auch nach (§. 253. d. V. Th. d. S.)

$$2) \quad \delta U = S\left[\partial U_{y_b} \cdot \partial^b \delta y\right]_{b+d=n-1}$$

ist, so folgt aus der Vergleichung von (1. und 2.), d. h. wenn man (1. nnd 2.) von einander subtrahirt, für jeden Werth r von b, nach (§. 328.):

$$3) \quad \partial U_{y_r} = S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+r+1}})\right]_{a+c=n-1-r},$$

so daß man, für 0, 1, 2, 3, $\cdots$ n—1 statt r, und weil unter y_0 das bloße y verstanden worden ist, sogleich hat

$$\partial U_y = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+1}})\Big]_{a+c=n-1}$$
$$= \partial V_{y_1} - \partial(\partial V_{y_2}) + \cdots \mp \partial^{n-1}(\partial V_{y_n});$$

$$\partial U_{y_1} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+2}})\Big]_{a+c=n-2}$$
$$= \partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3} + \cdots \pm \partial^{n-2}(\partial V_{y_n});$$

$$\partial U_{y_2} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+3}})\Big]_{a+c=n-3}$$
$$= \partial V_{y_3} - \partial(\partial V_{y_3}) + \cdots \mp \partial^{n-3}(\partial V_{y_n});$$

$$\partial U_{y_{n-2}} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+n-1}})\Big]_{a+c=1} = \partial V_{y_{n-1}} - \partial(\partial V_{y_n});$$

$$\partial U_{y_{n-1}} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+n}})\Big]_{a+b=0} = \partial V_{y_n}.$$

IV. Aber eben weil nun die Ableitungen ∂U_y, ∂U_{y_1}, ∂U_{y_2}, ∂U_{y_3}, ... $\partial U_{y_{n-1}}$ in die gegebene Funktion V ausgedrückt, also bekannt sind, so kann man nun ohne weiteres $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, $\delta^4 U$, ꝛc. bis in's Unendliche fort (nach §. 253. d. V. Th. d. S.) finden; also daß man zuletzt

$$(\delta) \cdots \quad U_x - U \quad \text{d. h.} \quad S\left[\delta^{a+1} U . \frac{x^{a+1}}{(a+1)!}\right]$$

in Form einer unendlichen Reihe, bloß in die gegebene Funktion V und in die willkührlich gedachten δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ausgedrückt, gefunden hat.

V. Setzt man nun in der Gleichung (IV. δ)

$$\delta^2 y = \delta^3 y = \delta^4 y = \text{ꝛc.} = 0,$$

und $\delta y = y$, so wie $x = -1$, so wird

$$y_x = y + x \cdot \delta y + \cdots = y - y = 0;$$

und U_x, V_x sind daher nun diejenigen Funktionen von x (ohne y und ohne Ableitungen von y zu enthalten), welche aus U, V beziehlich hervorgehen, wenn in letzteren überall 0 statt y, also auch 0 statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^n y_x$ gesetzt wird, während noch immer (nach I. 2.)

$$U_x = \int V_x \cdot dx$$

seyn muß, so daß diese Funktion U_x von x, aus der jetzigen V_x von x, durch bloße Integration dieser entwickelt gegebenen Funktion von x allein, nach den (Kap. VI. und VII. und VIII. d. IV. Th. d. S.) gefunden werden kann. Kennt man aber aus (IV. ♂) die Differenz $U_x - U = \varphi_{x,y,\cdots,y_{n-1}}$ (für diesen Werth von x und für diese Werthe von δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc.), und auch $U_x = X_x$, so hat man sogleich das gesuchte $U = X - \varphi_{x,y,\cdots,y_{n-1}}$, wenn auch in Form einer unendlichen Reihe, für welche jedoch, wo man sie in einem besonderen Falle der Anwendung abbrechen lassen wollte, sogleich nach (§. 258. d. V. Th. d. S.) die Grenzen bestimmt werden könnten, zwischen denen ihr Ergänzungsglied liegen muß.

VI. Die Bedingungsgleichung (II. ⊙) ist daher nothwendig, reicht aber auch aus, um die Ueberzeugung zu fassen, daß eine solche Funktion U von x, y, ∂y_x, $\cdots \partial^{n-1} y_x$ existirt, deren Ableitung nach allem x, während y_x ganz unbestimmt bleibt, die gegebene Funktion V wieder giebt. Diese Gleichung (II. ⊙) nennt man daher die Bedingungsgleichung der Integrabilität.

VII. Ist aber diese Bedingungsgleichung der Integrabilität erfüllt; hat man also die Ueberzeugung gefaßt, daß ein

$$U = \int V \cdot dx,$$

wie es hier gesucht wird, wirklich existirt; so kann man nun solches auch sogleich in endlicher Form finden. Da nämlich in (III.) bereits alle Ableitungen ∂U_y, ∂U_{y_1}, ∂U_{y_2}, $\cdots$ $\partial U_{y_{n-1}}$, nach den n verschiedenen und dabei von einander unabhängig gedachten Veränderlichen y, y_1, $\cdots$, y_{n-1} in V ausgedrückt gefunden, also bekannt sind, so hat man zur Bestimmung von U, als Funktion von n von einander unabhängig gedachten Veränderlichen y, y_1, $\cdots$ y_{n-1}, jetzt n Differenzial-Gleichungen von der Form

$$\partial U_y = P; \quad \partial U_{y_1} = Q; \quad \partial U_{y_2} = R; \text{ ꝛc. ꝛc.;}$$

also kann U selbst nach den (§. §. 296 — 300. d. V. Th. d. S.) so gefunden werden, daß diesen n Gleichungen genügt wird. Und

weil dann dieses U noch eine Konstante in sich aufnimmt, welche noch x enthalten kann, und welche durch X bezeichnet seyn mag; so darf man dieses bis jetzt gefundene U nur in die Gleichnng

$$\partial U = V$$

substituiren, um die Gleichung zur Bestimmung dieses X zu haben, wo dann wiederum eine Konstante C eingehen wird, welche auch kein x mehr enthält, und welche ganz willkührlich bleibt.

VIII. Damit man aber aus den n bekannten Ableitungen

$$\partial U_y,\ \partial U_{y_1},\ \partial U_{y_2},\ \partial U_{y_3},\ \ldots,\ \partial U_{y_{n-1}}$$

nach Anleitung der (§§. 296—300. d. V. Th. d. S.) die Funktion U wirklich finden könne, ist es nöthig, daß wiederum die in den eben angeführten (§§.) erwähnten Bedingungsgleichungen erfüllt werden, so wie auch noch die Bedingung erfüllt seyn muß, daß X wirklich bloß x enthalte. Weil man jedoch in (VI.) bereits erkannt hat, daß ein so gesuchtes U nämlich $U = \int V \cdot dx$ allemal existirt, so oft die einzige Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$\odot \ldots \left\{ \begin{array}{l} S[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_a})] = 0 \\ \quad a+b=n \\ \text{oder} \\ \partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) - \ldots \pm \partial^n(\partial V_{y_n}) = 0 \end{array} \right\}$$

erfüllt ist, so folgt, daß, so oft die einzige Bedingungsgleichung ($\odot$) erfüllt ist, jene übrigen Bedingungen zu gleicher Zeit alle erfüllt seyn werden.

Beispiel 1. Ist gegeben

$$V = \frac{y + y \cdot y_2 - x \cdot y_1 - y_1^2}{y^2};$$

so hat man

$$\partial V_y = \frac{-y - y \cdot y_2 + 2x \cdot y_1 + 2y_1^2}{y^3};\ \partial V_{y_1} = \frac{-x - 2y_1}{y^2};\ \partial V_{y_2} = \frac{1}{y};$$

$$\partial(\partial V_{y_1}) = \frac{-y - 2y \cdot y_2 + 2x \cdot y_1 + 4y_1^2}{y^3};\ \partial(\partial V_{y_2}) = -\frac{y_1}{y^2};$$

und

$$\partial^2(\partial V_{y_2}) = \frac{-y \cdot y_2 + 2y_1^2}{y^3}.$$

Also ist die Bedingungsgleichung der Integrabilität (⊙), nämlich

$$\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) = 0,$$

erfüllt. — Dann findet man aus obigen Gleichungen (III.)

1) $\partial U_y = \frac{-x-y_1}{y^2}$ und 2) $\partial U_{y_1} = \frac{1}{y}$;

so daß nun U nach den (§.§. 296—300. d. V. Th. d. S.) gefunden werden kann. Aus letzterer Gleichung (2.) ergibt sich aber, wenn man die Vorschrift der eben angeführten (§.§.) befolgt, da y und y_1 als von einander unabhängig angesehen werden müssen,

3) $$U = \int \frac{1}{y} \cdot dy_1 = \frac{1}{y} \cdot y_1 + U_1;$$

wo U_1 nach y_1 konstant, also höchstens eine Funktion von x und y seyn wird. Wird daher dieser Werth statt U in die (1.) gesetzt, so geht diese über in

$$-\frac{y_1}{y^2} + \partial(U_1)_y = \frac{-x-y_1}{y^2}, \text{ oder } \partial(U_1)_y = -\frac{x}{y^2};$$

also daß

4) $$U_1 = -\int \frac{x}{y^2} \cdot dy = \frac{x}{y} + X_x \quad \text{wird.}$$

Dann hat man aus (3.)

5) $$U = \frac{y_1}{y} + \frac{x}{y} + X_x = \frac{x + \partial y_x}{y} + X_x.$$

Weil aber $\partial U = V$ werden soll, so muß man den eben gefundenen Werth von U noch in diese Gleichung $\partial U = V$ setzen, um

$$\partial X_x = 0, \quad \text{also} \quad X_x = \text{Konstante} = C$$

zu erhalten, so daß endlich

6) $$U = \frac{x + \partial y_x}{y} + C$$

als Endresultat hervorgeht, wo C von x und von y ganz unabhängig ist.

Beispiel 2. Ist gegeben die Funktion

1) $$V = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot y^3 + \left(2x + \frac{3}{ax^4} + 3x^2y^2\right) \cdot y_1 + y_1^2 + \left(y - \frac{1}{ax^3}\right) \cdot y_2 + \frac{1 + y_1^2}{y_2} - \frac{x(1+y_1^2) \cdot y_3}{y_2^2},$$

wo y_1, y_2, y_3 beziehlich statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ stehen; so ist die Bedingungsgleichung (II. ⊙) jetzt

2) $\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2} - \partial^2(\partial V_{y_3}) = 0$

oder 3) $\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3})) = 0$

oder 4) $\partial V_y - \partial\left(\partial V_{y_1} - \partial(\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3}))\right) = 0,$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach allem x bedeuten.

Dabei hat man aber

5) $\partial V_y = 6xy^2 + 6x^2 \cdot y \cdot y_1 + y_2;$

6) $\partial V_{y_1} = 2x + \frac{3}{ax^4} + 3x^2 \cdot y^2 + 2y_1 + \frac{2y_1}{y_2} - \frac{2x \cdot y_1 \cdot y_3}{y_2^2};$

7) $\partial V_{y_2} = y - \frac{1}{ax^3} - \frac{1 + y_1^2}{y_2^2} + \frac{2x \cdot (1 + y_1^2) \cdot y_3}{y_2^3};$

8) $\partial V_{y_3} = -\frac{x \cdot (1 + y_1^2)}{y_2^2}.$

Also hat man auch, wenn die Gleichung (8.) nach allem x differenziirt wird:

9) $\partial(\partial V_{y_3}) = -\frac{1 + y^2 + 2x \cdot y_1 \cdot y_2}{y_2^2} + \frac{2x(1 + y_1^2) \cdot y_3}{y_2^3};$

und wenn man diese Gleichung von der Gleichung (7.) subtrahirt:

10) $\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3}) = y - \frac{1}{ax^3} + \frac{2x \cdot y_1}{y_2}.$

Diese nach allem x differenziirt, giebt wiederum:

11) $\partial\left(\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3})\right) = y_1 + \frac{3}{ax^4} + \frac{2y_1 + 2x \cdot y_2}{y_2} - \frac{2x \cdot y_1 \cdot y_3}{y_2^2};$

also folgt, wenn man diese Gleichung (11.) von der (6.) subtrahirt:

12) $\partial V_{y_1} - \partial\left(\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3})\right) = 3x^2 \cdot y^2 + y_1.$

Differenziirt man diese Gleichung wiederum nach allem x, so ergiebt sich

13) $\partial\left(\partial V_y - \partial(\partial V_{y_2} - \partial(\partial V_{y_3}))\right) = 6x \cdot y^2 + 6x^2 \cdot y \cdot y_1 + y_2.$

Und diese Gleichung, von der (5.) subtrahirt, giebt die (4.), also auch die (2.); so daß man hier die Bedingungsgleichung der Integrabilität erfüllt sieht.

Ist aber diese Bedingungsgleichung (II. ⊙) erfüllt, so findet sich weiter aus (III) in Verbindung mit den hiesigen Gleichungen (12, 10 und 8.):

14) $\partial U_y = 3x^2 \cdot y^2 + y_1;$

15) $\partial U_{y_1} = y - \frac{1}{ax^3} + \frac{2x \cdot y_1}{y_2};$

16) $\partial U_{y_2} = -\frac{x \cdot (1 + y_1^2)}{y_2^2}.$

Findet man nun aus diesen 3 Gleichungen die Funktion U nach (§. 300. d. V. Th. d. S.), so erhält man aus (16.) zunächst

17) $U = \int \left(-\frac{x \cdot (1 + y_1^2)}{y_1^2}\right) \cdot dy_2 = \frac{x \cdot (1 + y_1^2)}{y_2} + U_1,$

wo U_1 im Allgemeinen eine Funktion von x, y, y_1 (aber ohne y_2) seyn wird. Setzt man nun diesen Werth statt U in die Gleichungen (14. und 15.), so erhält man

18) $\partial(U_1)_y = 3x^2 \cdot y^2 + y_1;$

19) $\partial(U_1)_{y_1} = y - \frac{1}{ax^3}.$

Aus der (19.) findet man dann sogleich

20) $U_1 = \int \left(y - \frac{1}{ax^3}\right) \cdot dy_1 = \left(y - \frac{1}{ax^3}\right) \cdot y_1 + U_2,$

wo U_2 eine Funktion von x und y (aber ohne y_1) seyn wird. Und wird nun dieser Werth von U_1 in die (18.) substituirt, so ergiebt sich weiter

21) $\partial(U_2)_y = 3x^2 \cdot y^2;$

mithin sogleich

22) $U_2 = \int 3x^2 \cdot y^2 \cdot dy = x^2 \cdot y^3 + X,$

wo X bloß noch x enthalten kann. Also hat man nun aus (17. 20. und 22.)

23) $U = \frac{x \cdot (1 + y_1^2)}{y_2} + \left(y - \frac{1}{ax^3}\right) \cdot y_1 + x^2 y^3 + X.$

Um nun vollends X zu bestimmen, so setze man diesen Werth von U in die Gleichung

$$\partial U = V,$$

und man wird erhalten

24) $\partial X_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $X = \sqrt{x} + C,$

wo C eine beliebige Konstante ist (ohne x, ohne y, ohne y_1, ꝛc. ꝛc.).

§. 339b.

Noch eine andere Auflösung derselben Aufgabe.

I. Existirt eine solche Funktion $U = \int V.dx$, so muß

1) $\partial U = V$ oder $\partial U_{(x)} = V$

d. h. 2) $\partial U_x + \partial U_y \cdot \partial y_x + \partial U_{y_1} \cdot \partial^2 y_x + \partial U_{y_2} \cdot \partial^3 y_x + \cdots$

$$+ \partial U_{y_{n-1}} \cdot \partial^n y_x = V$$

seyn. — Weil nun in diesem Ausdruck zur Linken des (=) Zeichens nirgends y_n oder $\partial^n y_x$ vorkommt, als nur in dem letzten Gliede, in welchem selbst der erste Faktor $\partial U_{y_{n-1}}$ noch nicht y_n enthält, so muß, soll das gesuchte U existiren, die gegebene Funktion ein addirtes Glied von der Form

$$P \cdot y_n \quad \text{oder} \quad P.\partial^n y_x$$

enthalten, also daß

3) $$P = \partial V_{y_n}$$

seyn muß, wo P oder ∂V_{y_n} nur noch x, y, $y_1 \cdots$ bis zu y_{n-1}, aber nicht selber mehr y_n enthalten kann; und dies ist die erste Bedingung der Integrabilität, welche durch die Gleichung

(1′)··· $\partial^2 V_{y_n} = 0$

ausgedrückt werden kann. Also hat man

4) $$\partial U_{y_{n-1}} = \partial V_{y_n};$$

demnach

5) $$U = \int (\partial V_{y_n}) \cdot dy_{n-1} + U_1,$$

wo das Integral von ∂V_{y_n} nach y_{n-1} genommen (indem man x, y, y_1, y_2, ··· y_{n-2} als konstant ansieht) und irgend eines der besonderen Integrale ist, während U_1 die dazu gehörige Konstante vorstellt, also nicht mehr y_{n-1} enthalten kann, wohl aber als eine Funktion von x, y, y_1, ···· bis zu y_{n-2}, betrachtet und gesucht werden muß.

Setzt man aber diesen Werth für U aus (5.) in die (1.), so erhält man sogleich

6) $\partial U_1 = V - \partial\left(\int(\partial V_{y_n})\cdot dy_{n-1}\right) = V_1$;

wenn das bloße ∂ die Ableitungen nach allem x, dagegen V_1 den nun völlig bekannten Ausdruck $V - \partial\left(\int(\partial V_{y_n})\cdot dy_{n-1}\right)$ vorstellt.

II. Aus dieser Gleichung (I. 6.), nämlich aus

1) $\partial U_1 = V_1$

muß nun U_1 wiederum so gefunden werden, wie in (1.) aus $\partial U = V$, das U zu finden war. Zu dem Ende muß abermals die Bedingung der Integrabilität statt finden

(2′)··· $\partial^2(V_1)_{y_{n-1}} = 0$; *)

und findet sie statt, so folgt dann

2) $U_1 = \int(\partial(V_1)_{y_{n-1}})\cdot dy_{n-2} + U_2$,

wo bei der Integration noch y_{n-2} alles übrige als Konstant angesehen, wo ferner irgend eines der besonderen Integrale genommen, und wo die Konstante U_2, welche x, y, y_1 ··· bis y_{n-3} enthalten kann, noch weiter bestimmt werden muß.

Setzt man nun wiederum diesen Werth aus (2.) statt U_1 in die (1.), so erhält man zur Bestimmung von U_2 die Gleichung

3) $\partial U_2 = V_1 - \left(\int(\partial(V_1)_{y_{n-1}})\cdot dy_{n-2}\right) = V_2$,

so daß V_2 bekannt ist, und U_2 noch gesucht wird.

III. Wiederholt man aber das Verfahren (I.) hier zur Bestimmung von U_2, so findet sich wieder die dritte Bedingung der Integrabilität

(3′)··· $\partial^2(V_2)_{y_{n-2}} = 0$; **)

---

*) Setzt man in dieser Bedingungsgleichung statt V_1 seinen Werth aus (I. 6) in V ausgedrückt, so erhält man dieselbe Bedingungsgleichung (2′) auch in dieser Form:

$$\partial^2 V_{y_{n-1}} - 2\partial^{1,1} V_{y_n, y_{n-2}} - \partial\left(\partial^{1,1} V_{y_n, y_{n-1}}\right) = 0$$

**) In dieser Bedingungsgleichung kann man auch statt V_2 seinen Werth in V_1, dafür aber zuletzt wieder seinen Werth in V setzen; und sie selbst wird dadurch in die gegebene Funktion V ausgedrückt erscheinen.

und findet sie statt, so hat man wieder aus (II. 3.) d. h. aus

1) $\partial U_2 = V_2$,

sogleich

2) $U_2 = \int(\partial(V_2)_{y_{n-2}}).dy_{n-3} + U_3$;

während U_3 gesucht wird aus

3) $U_3 = V_2 - \partial\left(\int(\partial(V_2)_{y_{n-2}})\cdot dy_{n-3}\right) = V_3$.

IV. So fortfahrend erhält man zuletzt auch aus

1) $\partial U_{n-1} = V_{n-1}$,

wo V_{n-1} nur noch x, y und y_1 enthalten darf, und noch dazu das y_1 nur in einem addirten Gliede von der Form $P_{x,y}\cdot y_1$, so daß diese Funktion V_{n-1} wiederum der Bedingungsgleichung

(n′)··· $\partial^2(V_{n-1})_{y_1} = 0$

genügen muß, sogleich

2) $U_{n-1} = \int(\partial(V_{n-1})_{y_1})\cdot dy + U_n$,

während U_n (als bloße Funktion von x, ohne y, ohne y_1, ꝛc. ꝛc.) noch gefunden wird aus

3) $\partial U_n = V_{n-1} - \partial\left(\int(\partial(V_{n-1})_{y_1})\cdot dy\right) = V_n$.

V. Soll nun ein U_n gefunden werden können, so erhält man als letzte Bedingung der Integrabilität, weil nun das gefundene V_n bloß noch x allein enthalten darf,

(n+1′)··· $\partial(V_n)_y = 0$,

und, wenn sie erfüllt ist, aus der (IV. 3.), d. h. aus

1) $\partial U_n = V_n$,

sogleich

2) $U_n = \int V_n\cdot dx + C$,

wo C auch kein x mehr enthält, übrigens ganz willkührlich bleibt.

VI. Verbindet man aber alle Resultate (I. 5. II. 2. III. 2. IV. 2 und V. 2.) mit einander, so hat man zuletzt

$$(\mathbb{C})\cdots\ U = \int(\partial V_{y_n})\cdot dy_{n-1} + \int(\partial(V_1)_{y_{n-1}})\cdot dy_{n-2} +$$
$$+ \int(\partial(V_2)_{y_{n-2}})\cdot dy_{n-3} + \cdots + \int(\partial(V_{n-1})_{y_1})\cdot dy + \int V_n\cdot dx + C,$$

wenn nur die n+1 Bedingungsgleichungen (1′), (2′), (3′), ... (n′) und (n+1′), nämlich

$$(\varphi)\cdots\ \partial^2 V_{y_n} = 0;\ \ \partial^2(V_1)_{y_{n-1}} = 0;\ \ \partial^2(V_2)_{y_{n-2}} = 0;\ \cdots,$$
$$\partial^2(V_{n-1})_{y_1} = 0 \quad \text{und} \quad \partial(V_n)_y = 0$$

alle erfüllt sind, weil außerdem ein U, wie es hier gesucht wird, gar nicht existirt. *)

VII. Weil wir aber aus dem vorstehenden (§. 339.) bereits überzeugt sind, daß ein solches U existirt, so oft die einzige Bedingungsgleichung (⊙), nämlich

$$(\odot)\cdots\ S\Big[(-1)^a\cdot\partial^a(\partial V_{y_a})\Big]_{a+b=n} = 0$$

erfüllt ist, so folgt, daß diese einzige Gleichung (⊙) den n+1 Gleichungen in (VI. ♀.) völlig und gänzlich gleich zu achten ist. **)

Beispiel 1. Wenden wir übrigens diese Methode noch auf das (Beispiel 2. des §. 339.) an. Hier ist n=3, nämlich

$$1)\quad V = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2xy^3 + \left(2x + \frac{3}{ax^4} + 3x^2y^2\right)\cdot y_1 + y_1^2 +$$
$$+\left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot y_2 + \frac{1+y_1^2}{y_2} - \frac{x(1+y_1^2)\cdot y_3}{y_2^2};$$

also

$$2)\quad \partial V_{y_3} = -\frac{x(1+y_1^2)}{y_2^2}.$$

Die Bedingung (1′.), nämlich $\partial^2 V_{y_3} = 0$, ist also hier erfüllt, und man findet nun

---

*) Diese Bedingungsgleichungen können auch alle in die gegebene Funktion V ausgedrückt werden.

**) Man vergleiche den besondern Fall des (§. 342.), in welchem n=2 ist, und wo durch die angenommene Form für V bereits der Bedingung (1′.) nämlich $\partial^2 V_{y_n} = 0$ genügt ist, während die Gleichung (⊙) selber dann noch in zwei andere Gleichungen zerfällt, so daß das gegebene V der 2ten Ordnung wirklich dreien Gleichungen genügt oder zu genügen hat.

$$\text{I.}\quad U = \int(\partial V_{y_3})\cdot dy_2 + U_1 = \frac{x\cdot(1+y_1^2)}{y_2} + U_1;$$

hieraus $\partial\left(\int(\partial V_{y_3})\cdot dy_2\right) = 2x\cdot y_1 + \frac{1+y_1^2}{y_2} - \frac{x\cdot(1+y_1^2)\cdot y_3}{y_2^2}$;

demnach

$$3)\quad V_1 = V - \partial\left(\int(\partial V_{y_3})\cdot dy_2\right) = \left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot y_2 + \left(\frac{3}{ax^4} + 3x^2y\right)\cdot y_1 + y_1^2 + 2xy^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

daraus

$$4)\quad \partial(V_1)_{y_2} = y - \frac{1}{ax^3};$$

so daß die Bedingungsgleichung (2′·) nämlich $\partial^2(V_1)_{y_2} = 0$ wiederum erfüllt ist. Deshalb findet sich nun sogleich

$$\text{II.}\quad U_1 = \int(\partial(V_1)_{y_2})\cdot dy_1 + U_2 = \left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot y_1 + U_2.$$

Hieraus erhält man dann

$$\partial\left(\int\partial(V_1)_{y_2}\cdot dy_1\right) = \left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot y_2 + y_1^2 + \frac{3}{ax^4}\cdot y_1;$$

folglich noch

$$5)\quad V_2 = V_1 - \partial\left(\int\partial(V_1)_{y_2}\cdot dy_1\right) = 3x^2y^2\cdot y_1 + 2xy^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

woraus dann weiter

$$6)\quad \partial(V_2)_{y_1} = 3x^2y^2$$

folgt, so daß man die Bedingung (3′·), nämlich $\partial^2(V_2)_{y_1}$ abermals erfüllt sieht. — Deshalb findet sich nun sogleich

$$\text{III.}\quad U_2 = \int\partial(V_2)_{y_1}\cdot dy + U_3 = x^2y^3 + U_3,$$

so wie hieraus wiederum

$$\partial\left(\int\partial(V^2)_{y_1}\cdot dy\right) = 2xy^3 + 3x^2y^2\cdot y_1$$

hervorgeht, so daß man hat

$$7)\quad V_3 = V_2 - \partial\left(\int\partial(V_2)_{y_1}\cdot dy\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

und

$$\text{IV.}\quad U_3 = \int V_3\cdot dx = \sqrt{x} + C,$$

wo C eine willkührliche, auch von x unabhängige Konstante ist. —

Zuletzt ist demnach für U die Summe der Ausdrücke (I.—IV.) nämlich

$$U = \frac{x\cdot(1+\partial y_x^2)}{\partial^2 y_x} + \left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot\partial y_x + x^2y^3 + \sqrt{x} + C$$

gefunden, welcher Ausdruck für U derjenige ist, der nach allem x differenziirt (abgeleitet), die gegebene Differenzialfunktion V wiederum hervorbringt, während y als eine völlig unbestimmte Funktion von x behandelt wird.

Beispiel 2. Wäre gegeben

$$V = \frac{x\cdot(1+\partial y_x^2)}{\partial^2 y_x} + \left(y - \frac{1}{ax^3}\right)\cdot dy_x + x^2y^3 + \sqrt{x},$$

und nun dazu $U = \int V\cdot dx$ zu finden; so würde man, weil hier $n = 2$ ist,

$$\partial V_{y_2} = -\frac{x\cdot(1+\partial y_x^2)}{\partial^2 y_x^2}$$ finden.

Weil aber dieser Ausdruck wiederum $\partial^2 y_x$ enthält, so ist die erste Bedingungsgleichung der Integrabilität, nämlich $\partial^2 V_{y_2} = 0$ nicht erfüllt, und dies allein ist ausreichend, um uns zu der Ueberzeugung zu bringen, daß diesmal eine solche Funktion U_{x,y,y_1}, wie sie gesucht wird, nicht existirt. *)

Anmerkung. Die Bedingungsgleichung der Integrabilität, welche im (§. 339. II. ⊙) gefunden worden ist, kann man, wenn jenes Verfahren nicht angewandt werden soll, augenblicklich aus der Gleichung

$$U = \int V\cdot dx \quad \text{oder} \quad \partial U = V$$

ableiten.

Ist nämlich R eine beliebige Funktion von x, y, y_1, y_2, $\cdots y_{n-1}$, so ist allemal, für jede Zahl α

I. $\partial(\partial R)_{y_\alpha} = \partial R_{y_{\alpha-1}} + \partial(\partial R_{y_\alpha})$. **)

---

*) Ist aber $y = y_x$ gegeben, so kann man daraus ∂y_x, $\partial^2 y_x$ in x ausgedrückt finden, diese Werthe in V substituiren, und man wird dann V als eine bloße Funktion von x hergestellt haben (welche weder y noch die Zeichen ∂y_x, $\partial^2 y_x$ mehr enthält); und dann kann man auch $\int V_x\cdot dx$ sogleich finden, ohne weiteren Schwierigkeiten als denjenigen zu begegnen, welche bei Anwendung der Kap. (VI. VII u. VIII. d. IV. Th. d. S.) statt finden.

**) Es fällt dies sogleich in die Augen wenn man bedenkt, daß

$$\partial R = \partial R_x + \partial R_y\cdot y_1 + \partial R_{y_1}\cdot y_2 + \partial R_{y_2}\cdot y_3 + \cdots + \partial R_{y_{n-1}}\cdot y_n$$

Setzt man nun hier U statt R, also ∂U oder V statt ∂R, so erhält man

II. $$\partial V_{y_a} = \partial U_{y_{a-1}} + \partial(\partial U_{y_a});$$

woraus sich, wenn man statt a nach und nach 0 ($y_0 = y$ gedacht), 1, 2, 3, ... n—1 setzt, die n+1 Gleichungen

$$\begin{aligned}
1)\quad & \partial V_y = \partial(\partial U_y)\\
2)\quad & \partial V_{y_1} = \partial U_y + \partial(\partial U_{y_1})\\
3)\quad & \partial V_{y_2} = \partial U_{y_1} + \partial(\partial U_{y_2})\\
4)\quad & \partial V_{y_3} = \partial U_{y_2} + \partial(\partial U_{y_3})\\
n)\quad & \partial V_{y_{n-1}} = \partial U_{y_{n-2}} + \partial(\partial U_{y_{n-1}})\\
n+1)\quad & \partial V_{y_n} = \partial U_{y_{n-1}}
\end{aligned}$$

ergeben. Eliminirt man nun aus diesen n+1 Gleichungen die n Ausdrücke ∂U_y, ∂U_{y_1}, ∂U_{y_2}, ..., $\partial U_{y_{n-1}}$, so bleibt jene Bedingungsgleichung der Integrabilität zwischen den Ableitungen von V sogleich übrig. *)

Man sieht aber dann zwar sehr klar, daß diese Bedingungsgleichung der Integrabilität (§. 339. II. ⊙), nämlich

$$\odot \begin{cases} \int S\left[(-1)^a_{a+b=n} \cdot \partial^a \cdot (\partial V_{y_a})\right] = 0 \\ \text{oder} \\ \partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) - \cdots \pm \partial^n(\partial V_{y_n}) = 0 \end{cases}$$

---

und

$$\partial(\partial R_{y_a}) = \partial^{1,1} R_{x,y_a} + \partial^{1,1} R_{y,y_a} \cdot y_1 + \partial^{1,1} R_{y_1,y_a} \cdot y_3 + \cdots + \partial^{1,1} R_{y_{n-1},y_a} \cdot y_n \text{ ist.}$$

*) Diese Elimination macht sich aber am einfachsten dadurch, daß man der zweiten obiger n+1 Gleichungen links und rechts (jedem einzelnen Ausdruck) ∂, der dritten Gleichung ebenso ∂^2, der folgenden ∂^3, u. s. f., der letzten endlich ∂^n vorsetzt (d. h. ebenso oft die Ableitungen nach allem x nimmt), dann in der 2ten, 4ten, 6ten ꝛc. allen Gliedern das entgegengesetzte (nämlich das —) Zeichen giebt, zuletzt aber alle Gleichungen addirt.

nothwendig erfüllt sein muß, wenn die gesuchte Funktion

$$U_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}}$$

existiren soll können; aber man sieht nun gar noch nicht, daß diese Bedingungsgleichung auch ausreiche, d. h. daß das gesuchte U auch allemal wirklich existire, so oft diese Bedingungsgleichung der Integrabilität allein erfüllt ist.

Wollte man daher hier, eben so wie bei dem Verfahren des (§. 339.), von dem letzteren überzeugt werden, so müßte man hier noch nachweisen, daß, wenn die Bedingungsgleichung (⊙) erfüllt ist, dann nothwendig auch die n+1 Bedingungsgleichungen des (§. 339ᵇ.), nämlich die Gleichungen

$$\partial^2 V_{y_n} = 0, \quad \partial^2 (V_1)_{y_{n-1}} = 0, \quad \partial^2 (V_2)_{y_{n-2}} = 0, \ldots$$

$$\partial^2 (V_{n-1})_{y_1} = 0, \quad \partial (V_n) = 0$$

erfüllt seyn werden, oder mit andern Worten, man müßte noch nachweisen, daß die Bedingungsgleichung (⊙) in diese n+1 letztern Gleichungen zerfällt.

Daß ∂V_{y_n} nicht mehr y_n selber enthalten kann, daß man also $\partial^2 V_{y_n} = 0$ hat, wenn die Bedingungsgleichung (⊙) erfüllt ist, erkennt man sogleich daran, daß im Falle des Gegentheils das letzte Glied $\partial^n (\partial V_{y_n})$ in (⊙) die Ableitung y_{2n} oder $\partial^{2n} y_x$ enthalten würde, während die vorhergehenden Glieder der Gleichung (⊙) nur niedrigere Ableitungen von y nach x enthalten, also dieses Glied nicht vernichten könnten.

Die übrigen n Gleichungen

$$\partial^2 (V_1)_{y_{n-1}} = 0, \quad \partial^2 (V_2)_{y_{n-2}} = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

unmittelbar aus der einzigen (⊙) mittelst einfacher Rechnungen herzuholen, ist uns dagegen eben so wenig als unsern Vorgängern gelungen. Wenn man aber Formeln anwendet, wie die nachstehende

$$\text{III.} \quad \partial (\partial^m V)_{y_p} = S\Big[m_a \cdot \partial^b (\partial V_{y_c}) \Big]_{a+b=m,\ a+c=p},$$

von welcher obige (I.) nur ein ganz spezieller Fall ist, und wenn man dabei bedenkt, daß die Ableitungen des Ausdrucks (⊙) nach y, nach y_1, nach $y_2 \cdots$, y_p, y_n alle der Null gleich seyn müssen, so kann man wohl zu dem Gewünschten gelangen.

Gehen wir aber nun zur Betrachtung einiger in der Aufgabe des (§. 339.) enthaltenen besonderen Fälle über.

§. 340. Zusatz.

Ist die Funktion V nur von der ersten Ordnung in Bezug auf die Ableitungen von y nach x, ist namentlich

1) $V = M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x$ d. h. $V = M + N \cdot y_1$,

so hat man

2) $\partial V_y = \partial M_y + \partial N_y \cdot y_1$ und 3) $\partial V_{y_1} = N$,

also

3) $\partial(\partial V_{y_1}) = \partial N_x + \partial N_y \cdot y_1$.

Die Bedingungsgleichung der Integrabilität (⊙. II. §. 339.) für $n = 1$, nämlich

$$\partial V_y - \partial(V_{y_1}) = 0,$$

wird daher hier

4) $\partial M_y - \partial N_x = 0$ oder $\partial M_y = \partial N_x$.

Ist sie erfüllt, so existirt $U = \int V \cdot dx$ in dem Sinne des (§. 339.), und man hat, um dieses nach (§. 339[b].) zu finden,

5) $\partial U_y = \partial V_{y_1} = N$, also $U = \int_{y \div \beta} N \cdot dy + U_1$,

wo $\int_{y \div \beta} N \cdot dy$ irgend eines der besondern Integrale vorstellen soll, und wo U_1 eine Konstante (nach y) ist, mithin höchstens x enthalten kann. Demnach ist nach (§§. 219—224. d. V. Th. d. S.)

6) $\partial U = \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy + N \cdot \partial y_x + \partial U_1$ *);

---

*) Wird nämlich

$$\int_{y \div \beta} N \cdot dy \quad \text{durch} \quad \psi_{x,y}$$

bezeichnet, so ist

$$\partial \psi_x = \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy \quad \text{und} \quad \partial \psi_y = N.$$

und daher, weil $\partial U = V = M + N \cdot \partial y_x$ werden muß,

7) $\partial U_1 = M - \int_{y \div \beta} \partial N_x . dy = V_1$,

welcher Ausdruck V_1 bloß x enthalten darf, so daß seine Ableitung nach y, $= 0$ seyn muß; also daß man

$$\partial (V_1)_y = 0 \quad \text{oder} \quad \partial (M - \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy)_y = 0$$

oder

$$\partial M_y - \partial N_x = 0$$

d. h. die Bedingungsgleichung der Integrabilität wieder bekommt. — *) Aus (7.) folgt aber dann weiter

8) $U_1 = \int (M - \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy) \cdot dx$,

so daß man zuletzt

9) $U = \int_{y \div \beta} N \cdot dy + \int (M - \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy) \cdot dx$

hat, wo das Integral nach x allgemein genommen werden muß, so daß es noch eine willkührliche Konstante in sich schließt.

Beispiel 1. Ist z. B. $V = ay + x \cdot \partial y_x$, so findet sich die Bedingungsgleichung der Integrabilität $\partial M_y = \partial N_x$ auf $a = 1$ zurückgebracht, also nicht erfüllt oder erfüllt, je nachdem a wirklich nicht $= 1$, oder wirklich $= 1$ ist. — Es sey $a = 1$, also

$$V = y + x \cdot \partial y_x,$$

so findet sich sogleich

$$U = xy + c = \int V \cdot dx.$$

Beispiel 2. Ist $V = \frac{ay + x \cdot \partial y_x}{xy} = \frac{a}{x} + \frac{\partial y_x}{y}$, so ist die Bedingungsgleichung $\partial M_y = \partial N_x$ erfüllt, und man findet sogleich

$U = log.(x^a) + log. y + c$ oder $U = log.(C \cdot y \cdot x^a)$.

Aber es ist auch

$$\partial \psi = \partial \psi_x + \partial \psi_y \cdot \partial y_x;$$

also auch, wenn man die vorstehenden Werthe hier herein setzt:

$$\partial \psi = \int_{y \div \beta} \partial N_x \cdot dy + N \cdot \partial y_x.$$

*) Wäre also der (§. 339.) nicht vorher hingestellt worden, so würde man für diesen gegenwärtigen speziellen Fall, bloß im Sinne der Auflösung des (§. 339b.) verfahrend, die Bedingungsgleichung der Integrabilität, so wie U selbst gefunden haben.

Beispiel 3. Ist, allgemeiner als im (Beispiel 2.),

$$V = X_x + Y_y \cdot \partial y_x$$

gegeben, wo X_x bloß x, und Y_y bloß y enthalten soll, so ist $M = X_x$, $N = Y_y$, also $\partial M_y = 0$ und $\partial N_x = 0$; demnach ist die Bedingungsgleichung der Integrabilität hier allemal erfüllt, und man findet nun nach (§. 340.) sogleich

$$U = \int V \cdot dx = \int Y_y \cdot dy + \int X_x \cdot dx.$$

Anmerk. Ein ganz anderer Weg, diese besondere Aufgabe des (§. 340.) zu behandeln, wäre folgender: Soll nämlich

$$U = \int (M + N \cdot \partial y_x) \cdot dx$$

seyn, so muß

$$\partial U_x + \partial U_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x$$

oder

$$(\partial U_x - M) + (\partial U_y - N) \cdot \partial y_x = 0$$

seyn, für jede Funktion y_x, welche statt y gesetzt werden mag. Daher muß nach (§. 328.)

$$\partial U_x = M \quad \text{und} \quad \partial U_y = N$$

seyn, und man darf also nur noch U so suchen, daß diesen beiden letztern Gleichungen genügt wird. Diese letztere Aufgabe ist aber in dem (§. 297. d. V. Th. d. S.) behandelt, ja ganz fertig gemacht zu finden, so daß man daselbst genau die Bedingungsgleichung der Integrabilität, und, im Falle diese erfüllt ist, genau dasselbe Resultat gefunden sieht, welches auch hier im (§. 340.) gefunden worden ist, sobald man nur x mit y und M mit N vertauscht.

§. 341. Zusatz.

In dem Falle des vorliegenden Beispiels (3.) sagt man auch die Veränderlichen in V seyen getrennt. — Umgekehrt, sind die Veränderlichen getrennt, d. h. ist gegeben

1) $V = X_x + Y_y \cdot \partial y_x$,

so hat man sogleich, ohne die (§. §. 339. 340.) zu Hülfe zu nehmen, indem man bloß links und rechts von (1.) die Integrale nach allem x nimmt,

2) $\int V \cdot dx = \int X_x \cdot dx + \int (Y_y \cdot \partial y_x) \cdot dx,$

während jedoch nach (§. 166. d. IV. Th. d. S.) wiederum

3) $\int (Y_y \cdot \partial y_x) \cdot dx = \int Y_y \cdot dy$ ist,

so daß sogleich

4) $\int V \cdot dx = \int X_x \cdot dx + \int Y_y \cdot dy$ wird,

wo beide Integrale beliebige besondere seyn können, sobald man noch eine beliebige Konstante C (nach x und nach y konstant) hinzufügt.

Man hat also, im Falle die Veränderlichen in dem gegebenen V getrennt sind, nach der Bedingungsgleichung der Integrabilität, eben weil sie dann allemal erfüllt ist, sich nicht weiter umzusehen.

§. 342. Zusatz.

I. Ist V von der 2ten Ordnung (in Bezug auf die Ableitungen von y nach x) gegeben, ist also

1) $V = Q_{x,y,y_1} + P_{x,y,y_1} \cdot y_2,$

wo wir wiederum y_1 statt ∂y_x und y_2 statt $\partial^2 y_x$ geschrieben haben; so hat man, nach (§. 339.), der Bedingungsgleichung (⊙), nämlich der Gleichung

2) $\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) = 0$

zu genügen, wenn ein $U = \int V \cdot dx$ im Sinne des (§. 339.) existiren soll. Nun ist aber hier

3) $\partial V_y = \partial Q_y + \partial P_y \cdot y_2,$

4) $\partial V_{y_1} = \partial Q_{y_1} + \partial P_{y_1} \cdot y_2,$

und 5) $\partial V_{y_2} = P;$

ferner

6) $\partial(\partial V_{y_1}) = \partial^{1,1} Q_{x,y_1} + \partial^{1,1} Q_{y,y_1} \cdot y_1 + \partial^2 Q_{y_1} \cdot y_2 +$
$+ \partial^{1,1} P_{x,y_1} \cdot y_2 + \partial^{1,1} P_{y,y_1} \cdot y_1 \cdot y_2 + \partial^2 P_{y_1} \cdot y_2^2 + \partial P_{y_1} \cdot y_3$

und

7) $\partial^2(\partial V_{y_2}) = \partial^2 P_x + 2\partial^{1,1} P_{x,y} \cdot y_1 + 2\partial^{1,1} P_{x,y_1} \cdot y_2 +$
$+ \partial^2 P_y \cdot y_1^2 + 2\partial^{1,1} P_{y,y_1} \cdot y_1 \cdot y_2 + \partial^2 P_{y_1} \cdot y_2^2 + \partial P_y \cdot y_2 + \partial P_{y_1} \cdot y_3.$

Die Bedingungsgleichung (2.) der Integrabilität geht daher über in

$$8)\quad \left.\begin{array}{l} \partial Q_y + \partial^2 P_x - \partial^{1,1} Q_{x,y_1} + (2\partial^{1,1} P_{x,y} - \partial^{1,1} Q_{y,y_1}) \cdot y_1 + \\ + \partial^2 P_y \cdot y_1^2 + (2\partial P_y + \partial^{1,1} P_{x,y_1} - \partial^2 Q_{y_1} + \partial^{1,1} P_{y,y_1} \cdot y_1) \cdot y_2 \end{array}\right\} = 0$$

Weil aber in dieser Gleichung die erste Zeile kein y_2 enthält, und der Faktor von y_2 in der 2ten Zeile ebenfalls ohne y_2 ist, so könnte diese Gleichung für jedes y_x statt y gesetzt, nach (§. 328.) nicht bestehen, wenn nicht jede Zeile einzeln $= 0$ wäre. Die Bedingungsgleichung der Integrabilität (2.) zerfällt daher diesmal in zweie, nämlich in

$$9)\quad \partial Q_y + \partial^2 P_x - \partial^{1,1} Q_{x,y_1} + (2\partial^{1,1} P_{x,y} - \partial^{1,1} Q_{y,y_1}) \cdot y_1 + \partial^2 P_y \cdot y_1^2 = 0$$

und

$$10)\quad 2\partial P_y + \partial^{1,1} P_{x,y_1} - \partial^2 Q_{y_1} + \partial^{1,1} P_{y,y_1} \cdot y_1 = 0,$$

welche beide erfüllt seyn müssen, wenn ein $U = \int V \cdot dx$ im Sinne des (§. 339.) (d. h. für jedes y_x) soll statt finden können, wo dann U von der ersten Ordnung (in Bezug auf die Ableitungen von y nach x) seyn wird. *)

Sind aber diese Bedingungsgleichungen der Integrabilität (9. und 10.) erfüllt, so findet sich nach (§. 339. III.)

$$11)\quad \partial U_y = \partial Q_{y_1} - \partial P_x - \partial P_y \cdot y_1$$

und

$$12)\quad \partial U_{y_1} = P.$$

Aus diesen beiden letztern Gleichungen findet sich nun nach (§. 339. VII.) zunächst U mit einer Funktion X_x, und diese letztere wird dann noch aus der Gleichung

$$\partial U = V$$

vollends bestimmt.

II. Integrirt man übrigens den hier gegebenen Ausdruck

$$V \quad \text{oder} \quad Q_{x,y,y_1} + P_{x,y,y_1} \cdot y_2$$

unmittelbar nach (§. 339.[b]); so findet sich die dortige erste Be-

---

*) (Vergl. Lacroix Traité T. II. Nro. 550.)

dingungsgleichung $\partial^2 V_{y_2} = 0$ schon erfüllt, und man hat nach der dortigen Bezeichnung

$$\partial V_{y_2} = P; \qquad V_1 = Q + P \cdot y_2 - \partial(\int P \cdot dy_1)$$
$$= Q - \int \partial P_x \cdot dy_1 - y_1 \cdot \int \partial P_y \cdot dy_1 \text{ *)},$$

und $\partial(V_1)_{y_1} = \partial Q_{y_1} - \partial P_x - \partial P_y \cdot y_1 - \int \partial P_y \cdot dy_1$.

Die zweite Bedingungsgleichung der Integrabilität des (§. 339b.) $\partial^2(V_1)_{y_1} = 0$ wird daher jetzt folgende

$$\partial^2 Q_{y_1} - \partial^{1,1} P_{x,y_1} - 2\partial P_y - \partial^{1,1} P_{y,y_1} \cdot y_1 = 0,$$

und dies ist gerade wieder die vorhin in (I. 10.) bereits erhaltene Gleichung. Ist sie erfüllt, so folgt ferner nach der angeführten Regel des (§. 339b.)

$$V_2 = Q + y_1^2 \cdot \partial P_y - y_1 \cdot \partial Q_{y_1} - \int \partial^{1,1} Q_{x,y_1} \cdot dy + \int \partial^2 P_x \cdot dy +$$
$$+ 2y_1 \cdot \partial P_x.$$

Da nun diese Funktion V_2 bloß x allein enthalten darf, so muß deren Ableitung nach y der Null gleich werden, d. h. es muß die dritte Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$\partial(V_2)_y = 0 \text{ noch erfüllt seyn.}$$

Diese wird aber jetzt folgende:

$$\partial Q_y + y_1^2 \cdot \partial^2 P_y - y_1 \cdot \partial^{1,1} Q_{y,y_1} - \partial^{1,1} Q_{x,y_1} + \partial^2 P_x +$$
$$+ 2y_1 \cdot \partial^{1,1} P_{x,y} = 0,$$

und ist genau wieder die in (I. 9.) bereits gefundene.

Ist nun auch diese noch erfüllt, so hat man zuletzt

$$U = \int \partial V_{y_2} \cdot dy_1 + \int \partial(V_1)_{y_1} \cdot dy + \int V_2 \cdot dx.$$

---

*) Setzt man nämlich $\int P \cdot dy_1 = R_{x,y,y_1}$;

so hat man

$$\partial R_x = \int \partial P_x \cdot dy_1; \quad \partial R_y = \int \partial P_y \cdot dy_1 \text{ und } \partial R_{y_1} = P;$$

wenn nur alle 3 Integrale einen und denselben, nach x, y und y_1 konstanten Anfangswerth haben; also ist

III. Man kann auch die Methoden der (§. 339 u. §. 339ᵇ.) und der (Anmerkg zu §. 340.) untermischt anwenden. Setzt man nämlich

1) $\int V \cdot dx = U_{x,y,y_1'}$

so muß

2) $V = \partial U_x + \partial U_y \cdot \partial y_x + \partial U_{y_1} \cdot \partial^2 y_x$

werden; also hat man, weil hier

3) $V = Q + P \cdot \partial^2 y_x$

gegeben ist, nothwendig

4) $\partial U_{y_1} = P$ und 5) $U = \int P \cdot dy_1 + W$,

wo W nach y_1 konstant, aber noch eine Funktion von x und y seyn wird. Differenziirt man aber die (5.) nach allem x; so erhält man, weil $\partial U_{(x)} = V$ wird

6) $V = \partial(\int P \cdot dy_1)_{(x)} + \partial W_x + \partial W_y \cdot \partial y_x$,

und dies ist nun in Bezug auf das unbekannte $W_{x,y}$ die Gleichung, welche, da sie für jedes y gelten soll, nach (Anmerkung zu §. 340.) wiederum in die beiden Gleichungen zerfällt, welche ∂W_x und ∂W_y liefern, so daß dann W selbst gefunden wird.

Dabei giebt die Bedingung, daß aus der Gleichung (6.) die Ableitung y_1 herausfallen muß, die eine der Gleichungen (I. 9. und 10.) während die andere dieser Bedingungsgleichungen aus den für ∂W_x und ∂W_y gefundenen Ausdrücken hervorgeht, weil, wenn solche beziehlich W′ und W″ sind, dann noch

$$\partial W'_y = \partial W''_x$$

seyn muß.

Beispiel 1. In der Differenzial-Funktion

1) $V = (2xy \cdot \partial y_x + x^2 y) \cdot \partial^2 y_x + x \cdot \partial y_x^3 + (y + x^2) \cdot \partial y_x^2 + (2 + 3y) \cdot xy \cdot \partial y_x + y^3$

hat man

$$\partial(\int P \cdot dy_1) = \partial R_x + \partial R_y \cdot y_1 + \partial R_{y_1} \cdot y_2 = \int \partial P_x \cdot dy_1 + y_1 \cdot \int \partial P_y \cdot dy_1 + y_2 \cdot P,$$

2) $P = 2xy \cdot y_1 + x^2 y$

und

3) $Q = x \cdot y_1^3 + (y + x^2) \cdot y_1^2 + (2 + 3y) \cdot xy \cdot y_1 + y^3$,

und für diese Werthe von P und Q zeigen sich die Bedingungsgleichungen der Integrabilität (I. 9. u. 10.) erfüllt. Man hat nun nach (I. 11. u. 12.)

4) $\partial U_y = x \cdot y_1^2 + x^2 \cdot y_1 + 3xy^2$ und 5) $\partial U_{y_1} = 2xy \cdot y_1 + x^2 y$.

Aus der letztern Gleichung folgt

6) $U = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + U_1$,

wo U_1 bloß noch x und y aber kein y_1 mehr enthält. Dieser Werth von U in die (4.) substituirt, giebt

7) $\partial (U_1)_y = 3xy^2$,

woraus

8) $U_1 = xy^3 + X$

hervorgeht. Setzt man nun diesen Werth in (6.), so wie den dann erhaltenen Werth von U, nämlich

9) $U = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + xy^3 + X$,

in die Gleichung $\partial U = V$, so ergiebt sich noch zur Bestimmung von X die Gleichung

10) $\partial X_x = 0$, also $X = C$,

wo C ein auch von x unabhängiger, übrigens beliebiger Ausdruck ist.

Man hat also auf dem Wege der (I. des §. 342.) gefunden

$$U = xy \cdot \partial y_x^2 + x^2 y \cdot \partial y_x + xy^3 + C;$$

und dies ist so, daß

$$\partial U = V \quad \text{d. h.} \quad \partial U_{(x)} = V$$

wird, während y als irgend eine völlig unbestimmte Funktion von x angesehen und behandelt wird.

Integrirt man nach der (Nummer II. des §. 342. d. h. nach §. 339b.) dasselbe Beispiel, so findet sich zuerst die erste der dortigen Bedingungsgleichungen $\partial^2 V_{y_2} = 0$ erfüllt. Man hat dann

$$\partial V_{y_2} = P = 2xy \cdot y_1 + x^2 \cdot y,$$

also $$U = \int \partial V_{y_2} \cdot dy_1 + U_1 = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + U_1.$$

Weiter hat man

$$V_1 = V - \partial \left(\int \partial V_{y_2} \cdot dy_1 \right) = 3xy^2 \cdot y_1 + y^3;$$

also $\partial(V_1)_y = 3xy^2$; und $\partial^2(V_1)_{y_1} = 0$; also ist auch die 2te der dortigen Bedingungsgleichungen erfüllt.

Folglich ist

$$U_1 = \int \partial(V_1)_{y_1} \cdot dy = xy^3 + U_2.$$

Hernach findet sich

$$V_2 = V_1 - \partial\left(\int \partial(V_1)_{y_1} \cdot dy\right) = 0; \quad \partial(V_2)_y = 0,$$

demnach ist auch die letzte der dortigen Bedingungsgleichungen erfüllt; also ist

$$U_1 = \int o \cdot dx = C,$$

wo C die willkührliche, auch von x unabhängige Konstante ist.

Zuletzt hat man auf diesem Wege

$$U = \int \partial V_{y_2} \cdot dy_1 + \int \partial(V_1)_{y_1} \cdot dy + \int V_2 \cdot dx$$

d. h. $$U = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + xy^3 + C,$$

wie vorher auch.

Integrirt man endlich dieselbe Funktion

$$V = x \cdot y_1^3 + (y + x^2) \cdot y_1^2 + (2 + 3y) \cdot xy \cdot y_1 + y^3 + (2xy \cdot y_1 + x^2 y) \cdot y_2$$

auch nach der (Nummer III. des §. 342.), so hat man zuerst

$$\partial U_{y_1} = 2xy \cdot y_1 + x^2 \cdot y;$$

also $$U = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + W,$$

wo W bloß noch x und y enthält. Differenziirt man nun diese letztere Gleichung nach allem x, so erhält man

$$\partial U = y \cdot y_1^2 + xy_1^3 + 2xy \cdot y_1 \cdot y_2 + 2xy \cdot y_1 + x^2 y_1^2 + x^2 y \cdot y_2 + \partial W_x + \\ + \partial W_y \cdot y_1.$$

Setzt man diesen Werth statt ∂U in die Gleichung

$$\partial U = V,$$

so ergiebt sich zur Bestimmung von W die Gleichung

$$\partial W_x + \partial W_y \cdot y_1 = 3xy^2 \cdot y_1 + y^3;$$

also daß man hat

$$\partial W_x = y^3 \quad \text{und} \quad \partial W_y = 3xy^2.$$

Aus der letztern Gleichung folgt

$$W = x \cdot y^3 + X, \quad \text{also} \quad \partial W_x = y^3 + \partial X_x,$$

und dieser Werth für ∂W_x in die vorletzte Gleichung $\partial W_x = y^3$ substituirt, giebt

$$\partial X_x = 0, \quad \text{also} \quad X = C;$$

so daß

$$W = xy^3 + C,$$

folglich

$$U = xy \cdot y_1^2 + x^2 y \cdot y_1 + xy^3 + C$$

wird; genau so, wie wir dasselbe bereits 2 mal vorher gefunden haben.

Vergleicht man diese 3 Wege mit einander, so wird man bald finden, was ihnen wesentlich gemeinschaftlich ist, und wodurch sie sich in der Form von einander unterscheiden.

Immer kommt es zuletzt doch nur darauf an, daß man wirklich ein U gefunden habe, welches wirklich die Gleichung

$$\partial U = V \quad \text{d. h.} \quad \partial U_{(x)} = V$$

identisch macht, während unter y jede unbestimmte Funktion von x gedacht wird.

Beispiel 2. Hieher gehört auch noch das Beispiel 1. zu (§. 339.),

wo $$Q = \frac{y - x \cdot y_1 - y_1^2}{y^2}, \quad P = \frac{1}{y} \text{ ist,}$$

wo man also hat

$$\partial P_x = \partial^2 P_x = \partial^{1,1} P_{x,y} = \partial^{1,1} P_{x,y_1} = \partial^{1,1} P_{y,y_1} = 0,$$

dagegen

$$\partial Q_y = -\frac{1}{y^2} + 2\frac{x \cdot y_1 + y_1^2}{y^3}, \quad \partial Q_{y_1} = -\frac{x + 2y_1}{y^2}, \quad \partial^{1,1} Q_{x,y_1} = -\frac{1}{y^2},$$

$$\partial^2 Q_{y_1} = -\frac{2}{y^2}, \quad \partial^{1,1} Q_{y,y_1} = 2\frac{x + 2y_1}{y^3}, \quad \partial P_y = -\frac{1}{y^2},$$

$$\partial^2 P_y = \frac{2}{y^3}.$$

Und diese Werthe machen wirklich beide Gleichungen (I. 9. u. 10.) identisch, genügen also den Bedingungen der Integrabilität, so daß dem zufolge ein im Sinne des (§. 339.) gesuchtes $U = \int V \cdot dx$ existirt, und zwar das in dem angeführten Beispiel wirklich gefundene.

Anmerkung. Will man spezieller noch als im (§. 342.)

$$V = P_{x,y} + Q_{x,y} \cdot y_1 + R_{x,y} \cdot y_1^2 + \partial N_{x,y} \cdot y_2$$

nehmen, so hat man

$$\partial V_y = \partial P_y + \partial Q_y \cdot y_1 + \partial R_y \cdot y_1^2 + N_y \cdot y_2;$$

$$\partial V_{y_1} = Q + 2R \cdot y_1;$$

$$\partial V_{y_2} = N;$$

also

$$\partial(\partial V_{y_1}) = \partial Q_x + \partial Q_y \cdot y_1 + 2\partial R_x \cdot y_1 + 2\partial R_y \cdot y_1^2 + 2R \cdot y_2;$$
$$\partial^2(\partial V_{y_2}) = \partial^2 N_x + 2\partial^{1,1} N_{x,y} \cdot y_1 + \partial^2 N_y \cdot y_1^2 + \partial N_y \cdot y_2;$$

und die Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$\partial V_y - \partial(\partial V_{y_1}) + \partial^2(\partial V_{y_2}) = 0$$

geht jetzt über in

$$(\partial P_y - \partial Q_x + \partial^2 N_x) + 2(\partial^{1,1} N_{x,y} - \partial R_x) \cdot y_1 +$$
$$+ (\partial^2 N_y - \partial R_y) \cdot y_1^2 + 2(\partial N_y - R) \cdot y_2 = 0,$$

und zerfällt dann in die 4 Gleichungen

$$1) \quad \partial P_y - \partial Q_x + \partial^2 N_x = 0,$$
$$2) \quad \partial^{1,1} N_{x,y} - \partial R_x = 0,$$
$$3) \quad \partial N_y - R = 0$$
$$\text{und} \quad 4) \quad \partial^2 N_y - \partial R_y = 0,$$

welche sich jedoch bloß auf die beiden (1. und 3.) zurückführen, da die (2.) und die (4.) aus der (3.) sogleich hervorgehen, wenn man letztere nach x und nach y differenziirt. — Diese beiden Gleichungen sind aber wieder genau die Gleichungen (9. und 10. des §. 342. I.), wie man sich auch noch à posteriori überzeugt, sobald man dort in den Gleichungen (I. 9. und 10.) statt der dortigen Q und P, ihre jetzigen Werthe, nämlich beziehlich

$$P_{x,y} + Q_{x,y} \cdot y_1 + R_{x,y} \cdot y_1^2 \quad \text{und} \quad N_{x,y}$$

substituirt. *)

Wüßte man endlich schon im Voraus, daß diesmal das ge-

---

*) Findet man aus (3.) $N = \int R \cdot dy$, und setzt man diesen Werth in (1.), so erhält man

$$\partial P_y - \partial Q_x + \int \partial^2 R_x \cdot dy = 0;$$

oder, wenn man diese Gleichung nach y differenziirt:

$$\partial^2 P_y + \partial^2 R_x - \partial^{1,1} Q_{x,y} = 0,$$

und es kann daher auch diese Bedingungsgleichung der Integrabilität statt der (1.) gesetzt werden, während die (3.) unverändert dazu beibehalten werden kann. (Vgl. §. 301. Anmerk. 2. d. V. Th. d. S. und Lacroix Traité. T. II. Nro. 549.).

suchte U keine andere Form als diese $M'_{x,y}+N'_{x,y}\cdot y_1$ haben könnte, so folgt aus $\partial U = V$ oder $\partial U - V = 0$, sogleich

$$(\partial M'_x - P)+(\partial M'_y+\partial N'_x-Q)\cdot y_1+(\partial N'_y-R)\cdot y_1^2+ \\ +(N'-N)\cdot y_2 = 0;$$

und diese Gleichung zerfiele, weil y_1, y_2 ganz willkührlich sind, in die 4 Gleichungen

$$\partial M'_x - P = 0, \qquad \partial M'_y+\partial N'_x-Q = 0, \qquad \partial N'_y-R = 0$$

und $N' = N$;

so daß man nicht bloß N' bereits gefunden hat, sondern auch aus der ersten Gleichung sogleich $M' = \int P\cdot dx$ dazu findet, so wie noch, wenn man diese Werthe statt N' und M' in die beiden übrigen Gleichungen substituirt, die beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität, wie sie schon oben gefunden worden sind.

Weil man aber die Form von U, genau genommen, nicht voraussetzen darf, so ist dieser letztere Weg nicht recht zulässig.

§. 343. Zusatz.

Ist wiederum 1) $V = V_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n}$

ganz allgemein gedacht und so, daß die Bedingungsgleichung der Integrabilität, nämlich

$$(\odot)\cdots \quad S\left[(-1)^a_{a+b=n}\cdot\partial^a(\partial V_{y_a})\right] = 0,$$

erfüllt ist; hat man dazu

$$2)\ U = U_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}}$$

gefunden, so daß

$$3)\ U = \int V\cdot dx$$

ist; — denkt man sich aber jetzt noch überdies unter y diejenige Funktion y_x, welche V als Funktion von x identisch $= 0$ macht, so macht dieselbe Funktion y_x, wenn sie statt y in U gesetzt wird, nothwendig U nach allem x konstant, so daß man aus der Differenzialgleichung der nten Ordnung

$$4)\ V = 0$$

sogleich 5) $U = \text{const.}$ oder $U + C = 0$

als erste Integralgleichung folgern kann. Und weil der konstante Theil, der bei der Auffindung des U sich zuletzt noch als aggregirender Theil von U ergiebt, in der Gleichung (5.) auf die andere Seite geschafft und mit der daselbst schon stehenden Konstante vereinigt werden kann, so kann man aus der Gleichung (5.) die links in U stehende Konstante weglassen (d. h. der Null oder irgend einem andern bestimmten Werthe gleich setzen), wenn nur in U selbst eine willkürliche Konstante C bleibt.

Beispiel 1. Ist gegeben die Gleichung

$$y + x \cdot \partial y_x = 0 \quad \text{d. h.} \quad y \cdot dx + x \cdot dy = 0,$$

so findet sich sogleich nach (§. 340. Beispiel 1.)

$$xy = c$$

als das Integral dieser Differenzialgleichung der ersten Ordnung, wo c eine willkührliche Konstante ist.

Beispiel 2. Ist $\frac{a}{x} + \frac{dy_x}{y} = 0$ die gegebene Differenzialgleichung der ersten Ordnung, so findet man sogleich nach (§. 340. Beispiel 2.)

$$log\ Cy \cdot a^x = c;$$

oder, wenn man die Konstante $log\ C$ links weglässt, und rechts statt c jetzt $log\ c$ setzt,

$$log\,(y \cdot x^a) = log\ c \quad \text{oder} \quad y \cdot x^a = c$$

als Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Beispiel 3. Giebt man die Gleichung

$$ay + x \cdot \partial y_x = 0,$$

so genügt der Ausdruck zur Linken, statt V gesetzt, nicht der Bedingungsgleichung der Integrabilität, und die Methode läßt sich nicht mehr anwenden.

Dividirt man aber dieselbe gegebene Gleichung

$$ay + x \cdot \partial y_x = 0$$

vorher durch xy (d. h. multiplizirt man sie mit $\frac{1}{xy}$), so erhält man

$$\frac{a}{x} + \frac{\partial y_x}{y} = 0;$$

welches die Gleichung des vorhergehenden Beispiels ist, und welche nun sogleich

$$y \cdot a^x = c$$

als Integral liefert, in endlicher Form.

Beispiel 4. Aus $X_x + Y_y \cdot \partial y_x = c$ folgt sogleich

$$\int X \cdot dx + \int Y \cdot dy = c$$

als allgemeines Integral dieser Gleichung.

Beispiel 5. Ist gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

1) $y - x \cdot \partial y_x - \partial y_x^2 + y \cdot \partial^2 y_x = 0,$

so genügt der Ausdruck zur Linken, wenn solcher statt V gesetzt wird, den Bedingungen der Integrabilität nicht; ein zugehöriges U im Sinne des (§ 339.) existirt also nicht, und die Methode unsers gegenwärtigen Paragraphen läßt sich nicht mehr anwenden.

Multiplizirt man aber die Gleichung (1.) mit $\frac{1}{y^2}$, so daß hervorgeht

2) $\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \partial y_x - \frac{1}{y^2} \cdot \partial y_x^2 + \frac{1}{y} \cdot \partial^2 y_x = 0,$

so genügt der Ausdruck zur Linken, wenn solcher statt V gesetzt wird, den Bedingungen der Integrabilität, und man findet nach dem (Beispiel 1. d. §. 339.) sogleich

3) $\frac{x + \partial y_x}{y} = c$ oder $\partial y_x - c \cdot y + x = 0$

als das erste Integral der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung.

Beispiel 6. Wollte man zu dieser so eben erhaltenen Gleichung

1) $\partial y_x - cy + x = 0$

abermals das Integral finden, so würde der Ausdruck zur Linken, statt V gesetzt, der Bedingungsgleichung der Integrabilität nicht genügen. — Multiplizirt man aber vorher diese Gleichung mit e^{-cx}, so daß

2) $e^{-cx} \cdot \partial y_x + (x - cy) \cdot e^{-cx} = 0$

erhalten wird, so ist, wenn dieser Ausdruck zur Linken, statt V gesetzt wird, der Bedingungsgleichung der Integrabilität genügt, ein $U = \int V \cdot dx$ im Sinn des (§. 339.) wird gefunden, und man erhält sogleich

$$3)\qquad \left(y-\frac{x}{c}-\frac{1}{c^2}\right)\cdot e^{-cx}=c_1,$$

wo c_1 eine neue Konstante ist.

Diese Gleichung (3.) ist also die allgemeine Urgleichung mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1 der im (Beispiel 5.) gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, in endlicher Form.

Beispiel 7. Wäre gegeben die Gleichung der 3ten Ordnung

$$-\tfrac{1}{2}ax^3\sqrt{x}\cdot\partial^2y_x^2+(2ax^5+3+3ax^6y^2)\cdot\partial y_x\cdot\partial^2y_x^2+ax^4\cdot\partial y_x^2\cdot\partial^2y_x^2+$$
$$+(ax^4y-x)\cdot\partial^2y_x^3+ax^4(1+\partial y_x^2)\cdot\partial^2y_x-ax^5(1+\partial y_x^2)\cdot\partial^3y_x=0,$$

so würde sich für den Ausdruck zur Linken die Bedingungsgleichung der Integrabilität nicht erfüllt finden; daher wäre auf diese Gleichung, wie sie ist, die Methode unseres Paragraphen nicht anzuwenden. Multiplizirte man aber diese gegebene Differenzialgleichung der 3ten Ordnung zuvor mit $\frac{1}{ax^4\cdot\partial^2y_x^2}$, so würde in der neuen Gleichung der Ausdruck zur Linken des (=) Zeichens (im Sinne des §. 339.) integrabel seyn, und man würde dem (Beispiel 1. §. 339.) zufolge sogleich erhalten

$$\frac{x(1+\partial y_x^2)}{\partial^2y_x}+\left(y-\frac{1}{ax^3}\right)\cdot\partial y_x+x^2y^3+\sqrt{x}=c,$$

wo c die willkührliche Konstante ist. Bringt man diese Gleichung auf eine geordnete Form, so erhält man

$$x(1+\partial y_x^2)+\left[\left(y-\frac{1}{ax^3}\right)\cdot\partial y_x+x^2y^3+\sqrt{x}-c\right]\cdot\partial^2y_x=0,$$

und man kann nun versuchen, diese Gleichung der 2ten Ordnung auf demselben Wege aufs neue zu integriren. Und genügt dieser Ausdruck zur Linken nicht der Bedingungsgleichung

$$\partial V_y-\partial(\partial V_{y_1})+\partial^2(\partial V_{y_2})=0$$

d. h. nicht den beiden Gleichungen (9. u. 10. des §. 342.), so kann man vielleicht die gegebene Gleichung vorher wiederum mit einem schicklichen Faktor multipliziren, so daß in der neuen Gleichung der Ausdruck zur Linken integrabel wird, wie dies bisher in mehreren Beispielen bereits der Fall gewesen ist.

Diese letztern Anwendungen der Lehren des (§. 339.) führen zu der

§. 344. Aufgabe.

Wenn $V=V_{x,y,y_1,\cdots y_n}$ gegeben ist, und dabei den Be-

dingungen der Integrabilität nicht genügt, einen integrirenden Faktor oder Multiplikator $z = z_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}}$ zu finden, so daß das Produkt zV den Bedingungen der Integrabilität genügt, und $U = U_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}}$ so existirt, daß

$$U = \int (z \cdot V) \cdot dx \qquad \text{wird.}$$

Auflösung I. Da z·V den Bedingungen der Integrabilität genügen soll, so muß nach (§. 339. II. ⊙) z so gewählt werden, daß

$$(\odot)\cdots \quad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial (z \cdot V)_{y_a})\right]_{a+b=n} = 0$$

d. h. $\partial(z \cdot V)_y - \partial\left(\partial(z \cdot V)_{y_1}\right) + \partial^2\left(\partial (z \cdot V)_{y_2}\right) - \cdots$

$$\pm \partial^n \left(\partial (z \cdot V)_{y_n}\right) = 0$$

wird, wo die bloßen ∂, Ableitungen nach allem x bedeuten.

II. Da nach der Voraussetzung, dieser gesuchte integrirende Faktor z kein y_n enthalten soll, so wird aus der Gleichung (⊙) diese Ableitung y_n, so wie auch jede höhere Ableitung von y (nach x), von selbst herausfallen müssen; und deshalb wird diese Gleichung (⊙) in mehrere einzelne Gleichungen zerfallen können, welche alle Parzial-Differenzialgleichungen sind, die z und dann die Ableitungen von z nach den n+1 Veränderlichen x, y, y_1, ··· y_{n-1} enthalten, und welchen allen durch die gesuchte Funktion z zugleich genügt werden muß.

III. Deshalb kann es unendlich viele, aber vielleicht auch gar keinen einzigen Werth von z geben, welche allen diesen Gleichungen zugleich, d. h. der einzigen Gleichung (⊙) genügen.

IV. Es fällt aber sogleich aus (§. 339.) in die Augen, daß für V kein solcher, der Gleichung (⊙) genügender Werth von z existiren kann (der nämlich kein y_n enthalten soll), so lange nicht

V die Form $Q + P \cdot \partial^n y_x$ oder $Q + P \cdot y_n$

hat, wo Q und P kein $\partial^n y_x$ d. h. kein y_n enthalten.

V. Auf der andern Seite laßt sich beweisen, daß, wenn

V diese Form $Q + P \cdot y_n$

wirklich hat, auch allemal unendlich viele solche integrirende Multiplikatoren wirklich existiren.

Denkt man sich nämlich auf einen Augenblick unter y diejenige Funktion y_x, welche $V = 0$ macht, so läßt sich diese Gleichung $V = 0$ oder $Q + P \cdot \partial^n y_x = 0$, den (§. §. 276.—278. d. V. Th. d. S.) zu Folge, allemal dergestalt integriren, daß man y in x mit n willkührlichen Konstanten $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ erhält, so daß dieses y_x, statt y in $V = 0$ substituirt, diese Gleichung identisch macht. Dann lassen sich nach Anleitung des (§. 279. d. V. Th. d. S.) unendlich viele Differenzialgleichungen der $n-1$ten Ordnung finden, jedes mit einer einzigen willkührlichen Konstante C, wo entweder $C = c_1$, oder $C = c_2$, oder ꝛc., oder $C = c_n$, oder endlich wo C irgend einer Funktion dieser Konstanten $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$ ist, welche Gleichungen als eben so viele erste Integralgleichungen der gegebenen $V = 0$ der nten Ordnung angesehen werden können; d. h. welche, wenn man sie (nach allem x) differenziirt, und aus ihr und ihrer Differenzialgleichung die Konstante C eliminirt, wiederum die Gleichung $V = 0$ hervorbringen, d. h. eine solche Gleichung der nten Ordnung hervorbringen, daß, wenn man aus letzterer $\partial^n y_x$ findet, und diesen Werth (der aus $x, y, \partial y_x, \cdots \partial^{n-1} y_x$ zusammengesetzt seyn wird) in $V = 0$ statt $\partial^n y_x$ substituirt, diese Gleichung $V = 0$ identisch wird. — Löst man daher irgend eine dieser unendlich vielen ersten Integralgleichungen mit der Konstante C, nach dieser Konstante C algebraisch auf, so daß man erhält

$$\varphi_{x, y, y_1, \cdots y_{n-1}} = C,$$

und differenzirt man dann solche, so eliminirt sich C sogleich, und man erhält $\partial\varphi = 0$, d. h.

$$(\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot y_1 + \partial\varphi_{y_1} \cdot y_2 + \cdots + \partial\varphi_{y_{n-2}} \cdot y_{n-1}) + \partial\varphi_{y_{n-1}} \cdot y_n = 0,$$

oder $\psi + \partial\varphi_{y_{n-1}} \cdot y_n = 0$, wo man den eingeklammerten Ausdruck, der Kürze wegen, durch ψ bezeichnet hat.

Da nun diese Gleichung für $\partial^n y_x$ oder y_n genau dieselbe Zusammensetzung aus $x, y, y_1 \cdots y_{n-1}$ geben muß, als die obige

$$V = 0 \quad \text{oder} \quad Q + P \cdot y_n = 0,$$

so sind diese Werthe für y_n oder $\partial^n y_x$, nämlich

$$-\frac{\psi}{\partial\varphi_{y_{n-1}}} \text{ und } -\frac{Q}{P}$$

genau eine und dieselbe Zusammensetzung aus $x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, also

$$\frac{\psi}{\partial\varphi_{y_{n-1}}} = \frac{Q}{P} \text{ und daher auch } \frac{\psi}{Q} = \frac{\partial\varphi_{y_{n-1}}}{P}$$

völlig identische Gleichungen, was man auch statt $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ setzen möge, also auch welche Funktion y_x unter y nur immer gedacht werden mag. Demnach geht aus

$$V \text{ oder } Q+P\cdot y_n,$$

sogleich $\psi+\partial\varphi_{y_{n-1}}\cdot y_n$

d. h. ein vollständiges Differenzial $\partial\varphi$ hervor, wenn man V oder $Q+P\cdot y_n$ mit $\frac{\partial\varphi_{y_{n-1}}}{P}$ multiplizirt.

VI. Also existirt allemal ein integrirender Faktor z und dieser ist $\frac{\partial\varphi_{y_{n-1}}}{P}$. — Und weil jedes der unendlich vielen ersten Integrale von $V = 0$ mit einer willkührlichen Konstante C, zu einem solchen integrirenden Faktor z führt, so existiren auch allemal wirklich unendlich viele solche Faktoren z, und die obige Gleichung in (I.), welche zu deren Bestimmung diente, kann daher, auch wenn sie von selbst in mehrere einzelne zerfällt, nie Widersprüche enthalten, sondern muß immer zu diesen Werthen von z wirklich führen.

VII. Will man übrigens nur einen einzigen dieser integrirenden Multiplikatoren z haben, so ist es nicht nöthig, daß man die Parzialgleichung in (I.) wirklich vollständig integrirt, sondern es ist ausreichend, wenn man nur auf irgend einem Wege einen ihr genügenden Werth von z gefunden hat; sey es auch nur Versuchsweise.

Anmerkung. Es ist nicht einmal nöthig, um den integri-

renden Faktor aus einem ersten Integral zu erhalten, daß man letzteres nach der Konstante C auflößt, also in der Form

$$1) \qquad \varphi_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = C$$

nimmt; sondern man kann ihn auch finden, wenn man dieses Integral in der Form

$$2) \qquad \pi_{C,x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = 0$$

stehen läßt. Wird nämlich, wenn man diese Gleichung nach C auflößt, die obige (1.), d. h. $\varphi = C$ daraus, so ist

$$3) \qquad \pi_{\varphi,x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = 0$$

identisch, nach x, nach y, nach y_1, ꝛc. ꝛc. so wie nach y_{n-1}. Man hat daher, wenn man von (3.) die Ableitung nimmt nach y_{n-1}, die folgende Gleichung

$$4) \qquad \partial\pi_{\varphi} \cdot \partial\varphi_{y_{n-1}} + \partial\pi_{y_{n-1}} = 0;$$

woraus

$$5) \qquad \partial\varphi_{y_{n-1}} = -\frac{\partial\pi_{y_{n-1}}}{\partial\pi_{\varphi}}$$

hervorgeht, also daß der oben gefundene integrirende Faktor, nämlich $\frac{\partial\varphi_{y_{n-1}}}{P}$, jetzt durch $\frac{\partial\pi_{y_{n-1}}}{P \cdot \partial\pi_{\varphi}}$ ausgedrückt werden kann.

§. 345. Zusatz.

I. Sucht man daher zu irgend einer Differenzialgleichung der nten Ordnung z. B. zu

$$1) \qquad \psi_{x,y,y_1,\cdots y_n} = 0$$

ein erstes Integral, so bringe man die Gleichung $\psi = 0$ (dadurch, daß man sie nach y_n algebraisch auflößt), zunächst auf die Form

$$2) \qquad Q + y_n = 0, \quad \text{wo} \quad P = 1 \text{ ist,}$$

oder, wenn man mit einem Divisor wegmultiplizirt, auf die Form

3) $$Q+P\cdot y_n = 0;$$

suche dann aus der Gleichung (I. des §. 344.) den integrirenden Faktor z, finde

4) $$U = \int z\cdot(Q+Py_n)\cdot dx$$

nach Anleitung des (§. 339. oder §. 339^b); und man hat dann

5) $$U = \text{Const. oder } U=0,$$

wenn man die willkührliche Konstante bereits in U mit aufgenommen sich denkt, als das gesuchte erste Integral von $\psi = 0$.

Hierher gehören aber die Beispiele (3. 5. 6 und 7.) des (§. 343.), wo man gefunden hat beziehlich $z = \frac{1}{xy}$, $z = \frac{1}{y^2}$, $z = e^{-cx}$ und $z = \frac{1}{ax^4\cdot\partial^2 y_x^2}$ als integrirende Multiplikatoren. —

II. Will man nun das 2te allgemeine Integral von $V=0$ finden, so darf man nur von $U=0$ wiederum das erste allgemeine Integral suchen, auf demselben Wege. Man wird daher, wenn U noch nicht die Form $Q'+P'\cdot y_{n-1}$ hat, die Gleichung $U=0$ zuvor wieder nach y_{n-1} algebraisch auflösen, und dadurch auf die Form $Q'+P'\cdot y_{n-1}=0$ bringen, dann für $Q'+P'y_{n-1}$ den integrirenden Faktor z_1 suchen, und

$$T = \int z_1(Q'+P'\cdot y_{n-1})\cdot dx = 0$$

zum allgemeinen 2ten Integral haben.

So fortfahrend kann man wohl auch bis zum allgemeinen Ur-Integral gelangen.

Anmerkg. I. Ist

$$V = Q+P\cdot y_n = 0$$

gegeben, und sucht man nun zu diesem V den integrirenden Faktor z, so kann die Gleichung des (§. 344. I.), nämlich

$$(\odot)\cdots \quad S\Big[(-1)^a\cdot\partial^a(\partial(z\cdot V)_{y_a})\Big]_{a+b=n} = 0,$$

weil $V=0$ und also auch $\partial(z\cdot V)_{y_a} = z\cdot\partial V_{y_a}$ ist, jetzt zunächst diese andere Form

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad S\Big[(-1)^a\cdot\partial^a(z\cdot\partial V_{y_a})\Big]_{a+b=n} = 0$$

annehmen. Weil aber nach (§. 97. d. IV. Th. d. S.)

$$\partial^\mu(z\cdot\partial V_{y_a}) = S\Big[\mu_b\cdot\partial^c z\cdot\partial^b(\partial V_{y_a})\Big]_{c+b=\mu}$$

ist, so geht dadurch die Gleichung ($\mathfrak{C}$) wiederum in folgende über, nämlich in

$$(\mathfrak{d})\cdots \quad S\Big[(-1)^c\cdot\partial^c z\times(-1)^b\cdot(c+b)_b\cdot\partial^b(\partial V_{y_{c+b}})\Big]_{c+b+b=n}$$

d. h.
$$\left.\begin{aligned} &z\cdot[\partial V_y-\partial(\partial V_{y_1})+\partial^2(\partial V_{y_2})-\partial^3(\partial V_{y_3})+\cdots]\\ &-\partial z\cdot[\partial V_{y_1}-2\cdot\partial(\partial V_{y_2})+3\cdot\partial^2(\partial V_{y_3})-\cdots]\\ &+\partial^2 z\cdot[\partial V_{y_2}-3\cdot\partial(\partial V_{y_3})+\cdots]\\ &-\partial^3 z\cdot[\partial V_{y_3}-\cdots]\\ &+\cdots\cdots\\ &\vdots\\ &\pm\partial^n z\cdot\partial V_{y_n}\end{aligned}\right\} = 0,$$

wo man jedoch nicht vergessen muß, daß z eine Funktion von $x, y, y_1, \cdots y_{n-1}$ ist, ohne y_n enthalten zu dürfen, daß man daher

$$\partial z = \partial z_x+\partial z_y\cdot y_1+\partial z_{y_1}\cdot y_2+\cdots+\partial z_{y_{n-1}}\cdot y_n,$$

und auf ähnliche Weise $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, ꝛc. ꝛc. zu nehmen, diese Ausdrücke zur Rechten statt ∂z, $\partial^2 z$, $\partial^3 z$, ꝛc. ꝛc. zu substituiren, nachher aber mittelst der Gleichungen $V=0$, $\partial V=0$, $\partial^2 V=0$, ꝛc. ꝛc. wiederum y_n und alle höheren Ableitungen von y zu eliminiren hat.

Ist z. B. $V = M+N\cdot y_1 = 0$ gegeben, wo M und N bloß x und y enthalten sollen; so hat man statt der Gleichung ($\mathfrak{d}$) jetzt

$$(A)\cdots \quad z\cdot[\partial V_y-\partial(\partial V_{y_1})]-\partial z\cdot\partial V_{y_1} = 0.$$

Nun ist aber jetzt

$$\partial V_y = \partial M_y+\partial N_y\cdot y_1;\quad \partial V_{y_1} = N;$$

also wird die Gleichung (A.), nun

$$(B)\cdots \quad z\cdot[\partial M_y+\partial N_y\cdot y_1-\partial N]-N\cdot\partial z = 0.$$

Setzt man nun hier

statt ∂z seinen Werth $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$

und auch statt ∂N seinen Werth $\partial N_x + \partial N_y \cdot y_1$,

so geht die Gleichung (B) über in

$$(C)\cdots \quad z\cdot[\partial M_y - \partial N_x] - N\cdot\partial z_x - N\cdot\partial z_y\cdot y_1 = 0.$$

Weil aber die zur Bestimmung von z dienende Gleichung kein y_1 enthalten darf, in so ferne der integrirende Faktor z dasmal bloß x und y enthalten wird, so muß man hieraus mittelst der Gleichung $V=0$ noch y_1 eliminiren, und dadurch geht die Gleichung (C) über in

$$(D)\cdots \quad z\cdot[\partial M_y - \partial N_x] - N\cdot\partial z_x + M\cdot\partial z_y = 0. \quad *)$$

Nehmen wir noch das Beispiel, wo

$$1) \qquad V = y - x\cdot y_1 + ay^2 = 0$$

gegeben ist. — Hier hat man

$$2) \quad \partial V_y = 1 + 2ay; \qquad 3) \quad \partial V_{y_1} = -x;$$

und die Gleichung (⁂) wird daher nun

$$4) \qquad (2 + 2ay)\cdot z + x\cdot\partial z = 0.$$

Setzt man nun hier, da z bloß x und y enthalten kann, statt ∂z sogleich $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$, so wie statt y_1 aus $V = 0$ seinen Werth $\frac{y + ay^2}{x}$, so erhält man aus (4.) jetzt

$$5) \qquad (2 + 2ay)\cdot z + x\cdot\partial z_x + (y + ay^2)\cdot\partial z_y = 0,$$

und dies ist die Gleichung, aus welcher z gefunden werden muß. Man findet aus ihr gar bald, wenn man versucht, ob nicht $\partial z_x = 0$ seyn könne,

$$\partial z_y = -\frac{2}{y}, \qquad \text{also} \qquad z = \frac{1}{y^2}$$

als einen, dieser Parzialgleichung (5.) genügenden Werth **)

---

*) Dieselbe Gleichung hätte man viel schneller erhalten, wenn man die Gleichung des (§ 344. I.) ohne weiteres zur Bestimmung von z genommen hätte. Sie wäre dann geworden

$$\partial(z\cdot V)_y - \partial(\partial(z\cdot V)_{y_1}) = 0;$$

d. h.
$$\partial(z\cdot M)_y + \partial(z\cdot N)_y\cdot y_1 - \partial(z\cdot N) = 0;$$

d. h.
$$\partial(z\cdot M)_y - \partial(z\cdot N)_x = 0,$$

und dies ist die Gleichung (D); während der Umstand, daß dasmal $V = 0$ ist, jetzt gar nicht beachtet worden ist.

**) Hätte man dagegen die Gleichung zur Bestimmung von z nicht

II. Vergleicht man die nach dieser Anmerkung geschehene Entwickelung der zur Bestimmung des integrirenden Faktors z vorhandenen Gleichung, in welcher man den Umstand, daß $V=0$, also y_n eine völlig bestimmte Funktion von $x, y, y_1, \cdots y_{n-1}$ ist, benutzt hat, mit dem in den Noten betretenen Weg, wo diese Relation zwischen y_n und $x, y, y_1, \cdots y_{n-1}$ nicht in Betrachtung gezogen wurde, so findet man bald, daß der Weg dieser Anmerkung, wenn er auch richtig wäre, keineswegs vortheilhaft seyn würde. — Aber ist er auch richtig? — Ist es erlaubt, bei der Aufsuchung des integrirenden Faktors z für die Funktion V, darauf zu sehen, daß y gerade die bestimmte Funktion von x vorstellt, welche V der Null gleich macht? — Liegt es nicht gerade in dem Begriff des integrirenden Faktors z, daß y jede unbestimmte Funktion von x vorstellen soll? Offenbar ist also der ganze hier in dieser Anmerkung beschriebene Weg nicht zuläßig, wenigstens nicht unbedingt zuläßig. Wenn endlich die Beispiele zeigen, daß er bei ihnen doch zum richtigen Resultat geführt hat, so findet man den Grund davon bald in Folgendem.

Existirt nämlich wirklich ein integrirender Faktor z (welches hier der Fall ist, so oft V die Form $Q+P\cdot y_n$ hat), so fällt aus

---

hier aus (ζ der Anmerkg), sondern unmittelbar aus (§. 344. I.) genommen, so hätte man erhalten, weil z kein y_1 in sich aufnimmt,

$$\partial(z\cdot V)_y - \partial(\partial(z\cdot V)_{y_1}) = 0;$$

d. h.
$$z\cdot\partial V_y + V\cdot\partial z_y - \partial(z\cdot\partial V_{y_1}) = 0$$

oder
$$z\cdot(1+2ay)+(y-xy_1+ay^2)\cdot\partial z_y + x\cdot(\partial z_x+\partial z_y\cdot y_1)+z = 0;$$

d. h.
$$z\cdot(2+2ay)+x\cdot\partial z_x+(y+ay^2)\cdot\partial z_y = 0,$$

welches dieselbe Parzialgleichung ist, wie oben die (5.), während in der ganzen Rechnung der Umstand, daß $V=0$ ist, jetzt nicht beachtet worden ist.

Da übrigens dieses jetzige Beispiel nur ein spezieller Fall des vorhergehenden Beispiels ist, wo

$$M = (y+ay^2) \quad \text{und} \quad N = -x$$

ist, so würde die Gleichung $\partial(M\cdot z)_y = \partial(N\cdot z)_x$ zu demselben Resultate geführt haben.

seiner Gleichung y_n von selbst weg. Fällt aber y_n von selbst weg, so erhält man offenbar immer dasselbe Resultat, was man auch statt y_n setzen möge, in so ferne das, was dafür gesetzt wird, ebenfalls wieder von selber wegfällt. Also kann man dann auch statt y_n den aus $V = 0$ zu ziehenden Ausdruck dafür setzen, und der hier in der Anmerkung vorgeschlagene Weg ist daher dann ebenfalls richtig.

Ganz anders ist es aber, wenn für V kein solcher integrirender Faktor z existirt. Die Gleichung des (§. 344. I.) oder hier die Gleichung (⊙) zeigt diese Nicht-Existenz des Faktors z sogleich dadurch an, daß eben aus ihr die höchste Ableitung y_n nicht von selber wegfällt. Die Gleichungen (ℭ und ♁) dagegen, in denen y_n, y_{n+1}, ... mittelst der Gleichungen $V = 0$, $\partial V = 0$, ꝛc. eliminirt werden müssen, zeigen dies nicht mehr an, sondern liefern noch immer einen Werth von z, der aber natürlich kein integrirender Faktor ist.

Betrachten wir das Beispiel, wo

$$V = \frac{y}{y_1} + x = 0$$

gegeben ist. Die Gleichungen (ℭ oder ♁) geben sogleich, weil

$\partial V_y = \frac{1}{y_1}$ und $\partial V_{y_1} = -\frac{y}{y_1^2}$ ist,

$$z \cdot \left[\frac{1}{y_1} + \partial\left(\frac{y}{y_1^2}\right)\right] + \partial z \cdot \frac{y}{y_1^2} = 0$$

oder

$$z \cdot [2y_1^2 - 2y \cdot y_2] + \partial z_x \cdot y \cdot y_1 + \partial z_y \cdot y \cdot y_1^2 = 0.$$

Findet man nun aus $V = 0$ und $\partial V = 0$,

$$y_1 = -\frac{y}{x} \text{ und } y_2 = \frac{2y}{x^2},$$

und substituirt man diese Werthe in der vorstehenden Gleichung, so wird sie

$$-2z - x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y = 0,$$

und dieser Parzialgleichung genügen

$z = y^2$, auch $z = -x^2$, u. s. w.

Keiner dieser Werthe ist aber ein integrirender Faktor von V, weil dasmal keiner existirt.

III. Endlich wird aber der hier in (I.) vorgeschlagene Weg als im Allgemeinen völlig unbrauchbar erkannt, wenn man bedenkt, daß aus der Gleichung (⊙) zwar alle y_n, y_{n-1}, ꝛc. ꝛc. von selber sich wegheben müssen, wenn statt z die gesuchte Funktion von x, y, y_1, ···, y_{n-1} gesetzt wird, daß aber, eben weil z noch unbekannt ist, in der Gleichung (⊙) die Koeffizienten von y_n, y_{n+1}, ꝛc. einzeln der Null gleich gesetzt werden müssen, daß daher die Gleichung (⊙) im Allgemeinen mehrere Gleichungen

$$Z = 0, \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

zur Bestimmung von z liefern wird, während der hier vorgeschlagene Weg bloß die einzige Gleichung $Z + A \cdot Z_1 + B \cdot Z_2 + \cdots = 0$ an deren Stelle setzt, welche der gesuchte Werth von z zwar auch zu genügen hat, welche aber zur Bestimmung desselben nicht ausreicht.

Denkt man sich z. B. gegeben

$$V = Q + P \cdot y_2 = 0,$$

wo Q und P bloß Funktionen von x, y und y_1 sind, so wird man nach (⊙) zur Bestimmung von z die 2 Gleichungen (9. 10 des §. 342.) erhalten, wenn man daselbst $z \cdot Q$ und $z \cdot P$ beziehlich statt Q und P substituirt; weil $z \cdot Q + z \cdot P \cdot y_2$ integrabel werden muß, und $z \cdot Q$ u. $z \cdot P$ bloß x, y, y_1 enthalten. Der hier in der Anmerkg. und zwar in (I.) vorgeschlagene Weg würde dagegen zur Bestimmung von z nur die einzige Gleichung geben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} z \cdot [\partial Q_y + \partial P_y \cdot y_2 - \partial(\partial Q_{y_1} + \partial P_{y_1} \cdot y_2) + \partial^2 P] \\ - \partial z \cdot [(\partial Q_{y_1} + \partial P_{y_1} \cdot y_2) - \partial P] \\ + \partial^2 z \cdot P \end{aligned}\right\} = 0.$$

Führt man hier die Rechnungen vollends durch, d. h. setzt man hier statt ∂z und $\partial^2 z$ ihre Werthe, in die Parzial-Ableitungen ausgedrückt, nämlich

$$\partial z = \partial z_x + \partial z_y \cdot y_1 + \partial z_{y_1} \cdot y_2;$$

$$\partial^2 z = \partial^2 z_x + 2\partial^{1,1} z_{x,y} \cdot y_1 + 2\partial^{1,1} z_{x,y_1} \cdot y_2 + 2\partial^{1,1} z_{y,y_1} \cdot y_1 \cdot y_2 + \\ + \partial^2 z_y \cdot y_1^2 + \partial^2 z_{y_1} \cdot y_2^2 + \partial z_y \cdot y_2 + \partial z_{y_1} \cdot y_3;$$

ebenso

$$\partial P = \partial P_x + \partial P_y \cdot y_1 + \partial P_{y_1} \cdot y_2;$$

$$\partial^2 P = \partial^2 P_x + \cdots\cdots\cdots + \partial P_{y_1} \cdot y_3;$$

und eliminirt man nachgehends y_2 und y_3 mittelst der Gleichungen $V = Q + P \cdot y_2 = 0$ und $\partial V = 0$, welche $y_2 = -\frac{Q}{P}$

und

$$y_3 = \frac{-P^2\cdot(\partial Q_x + \partial Q_y\cdot y_1) + PQ\cdot(\partial Q_{y_1} + \partial P_x + \partial P_y\cdot y_1) - Q^2\cdot\partial P_{y_1}}{P^3}$$

geben, so erhält man jedenfalls nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung von z. — Unter allen Werthen, welche sie für z liefert, sind dann zwar die integrirenden Faktoren enthalten, aber noch herauszusuchen, und dadurch wird die Methode unbrauchbar.

§. 346. Zusatz.

Während der (§. 344.) gelehrt hat, daß ein integrirender Faktor z von V oder $Q+P\cdot y_n$, aus jeder der unzählich vielen ersten Integrale von der Form

$$\varphi = C$$

der Gleichung $V = 0$ oder $Q+P\cdot\partial^n y_x = 0$ erhalten wird, zeigt der (§. 345.) umgekehrt, daß jeder zu einer Differenzialfunktion V gefundene integrirende Faktor z, auch allemal eines der unzählich vielen ersten Integrale $U = C$ der Gleichung $V = 0$ oder $Q+P\cdot\partial^n y_x = 0$ liefert. — Also giebt es zu V oder $Q+P\cdot\partial^n y_x$ keinen integrirenden Faktor z, der nicht aus einen der unendlich vielen ersten Integrale von $V = 0$, mit einer willkührlichen Konstante C, auf die im (§. 344.) beschriebene Weise hervorgehen müßte.

Dies führt uns dahin, den Zusammenhang aller integrirenden Faktoren z einer Differenzialfunktion V oder $Q+P\cdot\partial^n y_x$, da solcher von dem Zusammenhang aller zu $V = 0$ gehörenden ersten Integrale abhängig ist, mit der größten Leichtigkeit zu übersehen. Man denkt sich nämlich zuerst das vollständige Ur-Integral von $V = 0$ mit seinen n willkührlichen Konstanten, und findet daraus zunächst die n ersten Integrale, deren jedes eine dieser n Konstanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ in sich aufnimmt, und welche, wenn man sie nach dieser Konstante algebraisch auflößt, auf die Form

(I.)···· $\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \varphi_3 = c_3, \quad \cdots\cdots \varphi_n = c_n$

gebracht werden können, wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ n verschiedene Zusammensetzungen aus $x, y, y_1, \cdots y_{n-1}$ sind.

Da nun jedes andere erste Integral, sobald es auf dieselbe Form, nämlich auf die Form

$$\psi_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1}} = a$$

gebracht ist, von jenen n ersten Integralen (I.) nur dadurch sich unterscheidet, daß die Konstante a aus einer, zweien, mehreren oder allen Konstanten $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ beliebig zusammengesetzt ist, so muß ψ aus einer, zweien, mehreren oder allen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ zusammengesetzt seyn (nach §. 279. d. V. Th. d. S.). — Also bekommt man aus den n Integralen in (I.) alle möglichen ersten Integrale von $V=0$, wenn man ganz beliebige Funktionen von einer, zweien, mehreren oder allen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ nimmt, und solche irgend einer Konstante a oder C gleich setzt. — Alle möglichen ersten Integrale von $V=0$ sind also auszudrücken durch

(II.)···· $F_{\Phi a} = C, \quad F_{\Phi a,\Phi b} = C, \quad F_{\Phi a,\Phi b,\Phi c} = C,$

u. s. w. f., endlich $F_{\Phi,\Phi_2,\cdots\Phi_n} = C$, wo C jedesmal eine andere willkührliche Konstante ist, und wo F jedesmal auch eine andere und jedesmal eine ganz beliebige Form der Zusammensetzung vorstellt, während $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$, ꝛc. ꝛc. beliebige der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ repräsentiren.

Hat man aber nun, nachdem alle ersten Integrale von $V=0$ gefunden sind, aus den n ersten Integralen in (I.) die n integrirenden Faktoren $z_1, z_2, z_3, \cdots z_n$ erhalten, nämlich nach (§. 344.)

(III.)··· $z_1 = \frac{\partial(\varphi_1)_{y_{n-1}}}{P}, \quad z_2 = \frac{\partial(\varphi_2)_{y_{n-1}}}{P},$

und allgemein $z_a = \frac{\partial(\varphi_a)_{y_{n-1}}}{P},$

so findet sich ein neuer integrirender Faktor z aus dem, alle ersten Integrale repräsentirenden ersten Integral

$$F_{\Phi_a,\Phi_b,\Phi_c,\cdots} = C,$$

indem man

$$z = \frac{\partial F_{(y_{n-1})}}{P}$$

d. h.

$$z = \frac{\partial F_{\varphi_a} \cdot \partial(\varphi_a)_{y_{n-1}} + \partial F_{\varphi_b} \cdot \partial(\varphi_b)_{y_{n-1}} + \partial F_{\varphi_c} \cdot \partial(\varphi_c)_{y_{n-1}} + \cdots}{P}$$

oder nach (III.)

(IV.)··· $z = \partial F_{\varphi_a} \cdot z_a + \partial F_{\varphi_b} \cdot z_b + \partial F_{\varphi_c} \cdot z_c + \cdots$

nimmt, wo z_a, z_b, z_c, ꝛc. ꝛc. bereits solche oben in (III.) gefundene integrirende Faktoren sind.

Der Ausdruck (IV.) enthält daher alle möglichen integrirenden Faktoren von $V = 0$, (also auch alle möglichen Integrale der Parzialgleichung in I. des §. 344.), sobald man nur die Zusammensetzungsform F ganz willkührlich sich denkt, und noch überdies beliebig viel (eine, mehrere oder alle) der durch φ_a, φ_b, φ_c, ꝛc. vorgestellten Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$ darin aufnimmt.

Anmerkung 1. Nimmt man statt F bloß eine beliebige Funktion einer einzigen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots \varphi_n$, z. B. F_{φ_a} so giebt die Formel (IV.) zum integrirenden Faktor

$$z = \partial F_{\varphi_a} \cdot z_a = \partial F_{\varphi_a} \cdot \frac{\partial(\varphi_a)_{y_{n-1}}}{P},$$

wo aber statt ∂F_{φ_a} eine ganz beliebige Funktion von φ_a gesetzt werden kann, eben weil auch F eine ganz beliebige Funktion von φ_a ist.

Anmerkung 2. Daß, wenn z_a, z_b, z_c, ꝛc. ꝛc. integrirende Faktoren von V sind, wenn also

$\int(z_a \cdot V) \cdot dx = \varphi_a$, $\int(z_b \cdot V) \cdot dx = \varphi_b$, $\int(z_c \cdot V) \cdot dx = \varphi_c$, ꝛc. ꝛc.

ist, dann auch z in (IV.) ein integrirender Faktor von V seyn müsse, — davon überzeugt man sich auch leicht à posteriori. Multiplizirt man nämlich V wirklich mit dem z aus (IV.), so erhält man

$$\partial F_{\varphi_a} \cdot (z_a \cdot V) + \partial F_{\varphi_b} \cdot (z_b \cdot V) + \partial F_{\varphi_c} \cdot (z_c \cdot V) + \cdots$$

oder, weil $z_a \cdot V = \partial(\varphi_a)$, $z_b \cdot V = \partial(\varphi_b)$, u. s. w. f. ist,

$$\partial F_{\varphi_a} \cdot \partial(\varphi_a) + \partial F_{\varphi_b} \cdot \partial(\varphi_b) + \partial F_{\varphi_c} \cdot \partial(\varphi_c) + \cdots \text{ d. h. } \partial F,$$

so daß F selbst das Integral $\int(z \cdot V) \cdot dx$ ist. —

Hier sollte aber auch gezeigt werden, daß in (IV.) alle integrirenden Faktoren enthalten sind, und deshalb ist der oben zurückgelegte Weg betreten worden.

Anmerkung 3. Der singuläre Werth einer gegebenen Differenzialgleichung

$$V = 0 \quad \text{oder} \quad Q + P \cdot y_n = 0,$$

muß jeden integrirenden Faktor z auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, weil er dem Integral $\int(zV) \cdot dx = C$ nicht genügt, also $\int(zV) \cdot dx$ nicht konstant, sondern zu einer Funktion von x macht, also das Produkt $z \cdot V$ nicht der Null gleich macht, während er doch der Gleichung $V = 0$ genügt, also den einen Faktor V des eben gedachten Produktes $z \cdot V$ zu Null macht. Der andere Faktor z hat also für diesen Fall die Form $\frac{1}{0}$. Dasselbe geht aber auch aus den ersten Nummern der (§. §. 270. 275. und 280.) hervor. Ja die hiesige Betrachtung konnte die Veranlassung werden, jene Nummern gerade so, wie solche dort zu finden sind, zu geben.

§. 347. Zusatz.

Gehen wir nun in besondere Fälle ein, und suchen wir zuerst den integrirenden Faktor $z_{x,y}$ für die Funktion

$$1) \qquad M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x,$$

so wird die Gleichung (§. 344. I.) zu seiner Bestimmung jetzt (Vgl. Note zur Anmerk. des §. 345.)

$$2) \qquad \partial(N \cdot z)_x = \partial(M \cdot z)_y$$

d. h.
$$z \cdot \partial N_x + N \cdot \partial z_x = z \cdot \partial M_y + M \cdot \partial z_y$$

oder

$$3) \qquad (\partial N_x - \partial M_y) \cdot z + N \cdot \partial z_x - M \cdot \partial z_y = 0,$$

welches eine Parzialgleichung der 1sten Ordnung ist, und, nach (Kap. XIII.) integrirt, z in x und y mit einer willkührlichen Funktion ψ_ω giebt, während wiederum ω eine bestimmte Funktion von x und y ist, welche auch z selbst in sich aufgenommen haben kann.

Weil es aber auf systematischem Wege selten wirklich durchgesetzt werden kann, einen Werth von z in endlicher Form zu finden, welcher der Parzialgleichung (3.) genügt, und welcher daher einer der integrirenden Faktoren wäre, so muß man hier schon meistentheils zu bloßen Versuchen seine Zuflucht nehmen.

Und da heben sich nun einige Fälle heraus, welche zunächst versucht werden müssen.

I. Man muß zusehen, ob man nicht leicht eine Trennung der Variabeln bewirken kann, weil dann die Funktion allemal integrabel wird. — Die allgemeinste Form, für welche dies unmittelbar gelingt, ist

$$X \cdot Y + X' \cdot Y' \cdot \partial y_x,$$

wenn X, X' bloße Funktionen von x, und Y, Y' bloße Funktionen von y sind; denn man darf nur $z = \frac{1}{Y \cdot X'}$ nehmen, so hat man, wenn mit z multiplizirt wird, sogleich die Funktion

$$\frac{X}{X'} + \frac{Y'}{Y} \cdot \partial y_x,$$

deren Integral

$$= \int \frac{X}{X'} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy \qquad \text{ist.}$$

Hieher gehört das Beispiel (3. des §. 343.).

II. Ferner muß man, wenn der eben gemachte Versuch nicht gelingt, zusehen, ob nicht ein z gefunden werden kann, welches bloß x aber kein y enthält. Zu dem Ende setzt man $\partial z_y = 0$, in der Gleichung (3.), und man erhält

$$4) \quad (\partial N_x - \partial M_y) \cdot z + N \cdot \partial z_x = 0$$

zur weitern Bestimmung von z. Diese (4.) wird nach z und x getrennt, also integrabel, und giebt

$$5) \quad \frac{\partial N_x - \partial M_y}{N} + \frac{\partial z_x}{z} = 0,$$

und liefert wirklich ein z bloß in x, wenn $\frac{\partial N_x - \partial M_y}{N}$ kein y mehr enthält. Außerdem ist jedoch dieser Versuch vergebens gewesen.

Ist aber aus $\frac{\partial N_x - \partial M_y}{N}$ der Variable y wirklich herausgefallen, so liefert die Gleichung (5.) augenblicklich

$$6) \quad \int \frac{\partial N_x - \partial M_y}{N} \cdot dx + log\, z = 0,$$

also $$7) \quad z = e^{-\int \frac{\partial N_x - \partial M_y}{N} \cdot dx},$$

wo das bloß angezeigte Integral ein allgemeines ist, also eine willkührliche Konstante in sich schließt.

Hieher gehört aber das Beispiel (6. des §. 343.), in welchem der integrirende Faktor e^{-cx} auf diesem Wege gefunden worden ist.

III. Aber eben so kann man versuchen, ob nicht vielleicht ein z gefunden werden kann, welches der Gleichung (3.) genügt, übrigens bloß eine Funktion von y allein, ohne x ist. — Man setzt $\partial z_x = 0$, bekommt aus (3.)

$$(\partial N_x - \partial M_y).z - M \cdot \partial z_y = 0,$$

und findet daraus

$$z = e^{\int \frac{\partial N_x - \partial M_y}{M} \cdot dy}.$$

Damit aber dieser Versuch mit Erfolg gekrönt werde, ist es erforderlich, daß die gegebenen M, N so sind, daß $\frac{\partial N_x - \partial M_y}{M}$ kein x mehr enthält.

Beispiel. Ist $V = 1 + (y - cx) \cdot \partial y_x$,

so ist $M = 1$, $N = y - cx$, also $\partial M_y = 0$, $\partial N_x = -c$, also $\frac{\partial N_x - \partial M_y}{M} = -c$; demnach $z = e^{-cy}$ der integrirende Faktor. Multiplizirt man damit das gegebene V, so erhält man

$$e^{-cy} \cdot V = e^{-cy} + e^{-cy} \cdot (y - cx) \cdot \partial y_x,$$

und hiervon findet sich das Integral (nach §. 339.)

$$U = \int e^{-cy} \cdot V \cdot dx = e^{-cy} \cdot \left(x - \frac{1}{c} y - \frac{1}{c^2}\right) + C_1.$$

IV. Man kann auch versuchen, ob der integrirende Faktor nicht die Form $z = \varphi_x + \psi_y$, oder die Form $z = \varphi_x \cdot \psi_y$ haben werde, welches wiederum in einigen Fällen seyn kann, und

wenn es ist, zur leichtern Bestimmung von φ_x und ψ_y, also auch von z führt.

V. Ueberhaupt wird der Faktor z leichter gefunden werden aus der ihn bestimmenden Gleichung

$$3) \qquad (\partial N_x - \partial M_y)\cdot z + N\cdot \partial z_x - M\cdot \partial z_y = 0,$$

sobald man seine Form im Voraus kennt oder ahnet, und deshalb voraus setzt. (Vergl. Kap. XVII. 3te Abtheilung).

VI. Läßt sich aus M und N der Faktor x^r herausetzen, so daß die 2ten Faktoren bloße, übrigens beliebige Funktionen von $\frac{y}{x}$ werden, ist also

$$M = x^r\cdot f_\omega \quad \text{und} \quad N = x^r\cdot \varphi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \frac{y}{x} \quad \text{ist;}$$

so ist der integrirende Faktor allemal

$$z = \frac{1}{M\cdot x + N\cdot y}.$$

Denn substituirt man diesen Werth für z in die Bedingungsgleichung der Integrabilität (3.), so reduzirt sie sich auf

$$M\cdot(x\cdot\partial N_x + y\cdot\partial N_y) - N\cdot(x\cdot\partial M_x + y\cdot\partial N_y) = 0,$$

und wird sogleich identisch, wenn man bedenkt, daß

$$\partial M_x = r\cdot x^{r-1}\cdot f_\omega - y\cdot x^{r-2}\cdot \partial f_\omega; \qquad \partial M_y = x^{r-1}\cdot \partial f_\omega;$$

$$\partial N_x = r\cdot x^{r-1}\cdot \varphi_\omega - y\cdot x^{r-2}\cdot \partial \varphi_\omega; \qquad \partial N_y = x^{r-1}\cdot \partial \varphi_\omega \quad \text{ist.}$$

VII. Sind daher M und N homogene Funktionen von x und y vom rten Grade, so ist die Bedingung in (VI.) erfüllt nach (§. 112. d. IV. Th. d. S.), und deshalb ist dann wiederum

$$z = \frac{1}{M\cdot x + N\cdot y}$$

der integrirende Faktor.

Ist also gegeben $3x^2 + (ax^2 + 3y^2)\cdot \partial y_x$, so ist der integrirende Faktor $z = \frac{1}{3x^3 + ax^2y + 3y^3}$. Multiplizirt man damit, und integrirt man dann nach (§. 340. oder Anmerkg zu §. 340.), so wird man keinen andern Schwierigkeiten begegnen, als welche im (IV. Th. d. S.) bei

der Integration der entwickelt gegebenen Funktionen von x vorkommen können. *)

VIII. Der integrirende Faktor von

$$V = M + N \cdot \partial y_x$$

findet sich zuweilen auch dadurch, daß es gelingt M und N dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, daß

$$V \text{ die Form } (P + Q \cdot \partial y_x) + (P' + Q' \cdot \partial y_x)$$

annimmt, während für den einen Theil $P + Q \cdot \partial y_x$ der integrirende Faktor z, für den andern Theil $P' + Q' \cdot \partial y_x$ der integrirende Faktor z′ gefunden werden kann. Hat man dann

$$\int z \cdot (P + Q \cdot \partial y_x) \cdot dx = u$$

und

$$\int z' \cdot (P' + Q' \cdot \partial y_x) \cdot dx = u'$$

gefunden, so sind auch

$$z \cdot \varphi_u \quad \text{und} \quad z' \cdot \psi_{u'}$$

integrirende Faktoren beziehlich von

$$P + Q \cdot \partial y_x \quad \text{und} \quad P' + Q' \cdot dy_x.$$

Gelingt es nun φ und ψ so zu wählen, daß

$$z \cdot \varphi_u = z' \cdot \psi_{u'}$$

wird, so geht

$$M + N \cdot \partial y_x$$

---

*) Sind M und N homogene Funktionen von x und y, so kann man nicht behaupten, daß auch

$$U_{x,y} = \int (M + N \cdot \partial y_x) \cdot dx$$

eine homogene Funktion von x und y seyn müsse, wie gerade dieses Beispiel zeigte. — Glaubt man aber in einem besondern Falle voraussetzen zu dürfen, daß auch U eine homogene Funktion von x und y ist, und zwar von der mten Dimension, so hat man in diesem Falle (nach §. 113. d. IV. Th. d. S.)

$$x \cdot \partial U_x + y \cdot \partial U_y = m \cdot U$$

d. h.

$$M \cdot x + N \cdot y = m \cdot U,$$

und so liefert diese Eigenschaft der homogenen Funktionen sogleich U selbst. (Vgl §. 354. I. in der nächsten 2ten Abtheilung dieses Kap.).

durch Multiplikation mit diesem Faktor $z \cdot \varphi_u = z' \cdot \psi_{u'}$

in $$\varphi_u \cdot \partial u + \psi_{u'} \cdot \partial u' = 0$$

über, also daß man dann zum Integral erhält

$$\int \varphi_u \cdot du + \int \psi_{u'} \cdot du' = C.$$

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\alpha y + \beta x \cdot \partial y_x = x^m y^n \cdot (ay + bx \cdot \partial y_x),$$

so hat man diesen Fall, wenn man diese Gleichung auf Null bringt, und dann für die Differenzialfunktion selbst den integrirenden Faktor sucht.

Da nämlich $\alpha y + \beta x \cdot \partial y_x$ homogen ist, so ist nach (VII.) der integrirende Faktor dieses Theiles

$$\frac{1}{(\alpha + \beta)xy} \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{xy};$$

und dann ist noch

$$\int \frac{\alpha y + \beta x \cdot \partial y_x}{xy} \cdot dx = \alpha \cdot \log x + \beta \cdot \log y = \log (x^\alpha \cdot y^\beta) = u.$$

Von dem andern Theil

$$x^m y^n \cdot (ay + bx \cdot \partial y_x),$$

weil er ebenfalls homogen ist, ist nach (VII.) der integrirende Faktor

$$\frac{1}{x^m y^n \cdot (a + b)xy} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{1}{x^{m+1} \cdot y^{n+1}},$$

und man hat dann

$$\int \frac{x^m y^n \cdot (ay + bx \cdot \partial y_x)}{x^{m+1} \cdot y^{n+1}} \cdot dx = a \cdot \log x + b \cdot \log y = \log (x^a \cdot y^b) = u'.$$

Nimmt man nun $\varphi_u = e^{ku}$ und $\psi_{u'} = e^{hu'}$, so wird

$$z \cdot \varphi_u = x^{\alpha k - 1} \cdot y^{\beta k - 1} \quad \text{und} \quad z' \cdot \varphi_{u'} = y^{ah - m - 1} \cdot y^{bh - n - 1}.$$

Damit nun $z \cdot \varphi_u = z' \cdot \varphi_{u'}$ werde, darf man nur k und h so nehmen, daß

$$\alpha k - 1 = ah - m - 1 \quad \text{und} \quad \beta k - 1 = bh - n - 1$$

werde. Der gesuchte Faktor $z \cdot \varphi_u$ oder $z' \cdot \psi_{u'}$ ist daher jetzt

$$= x^{\frac{(an - bm)\alpha}{\alpha b - \beta a} - 1} \cdot y^{\frac{(an - bm)\beta}{\alpha b - \beta a} - 1}.$$

Man findet zuletzt, wenn man die gegebene Differenzialgleichung mit diesem integrirenden Faktor multiplizirt und integrirt, das allgemeine Integral

$$\frac{1}{k}x^{k\alpha}\cdot y^{k\beta} = \frac{1}{h}\cdot x^{ha}\cdot y^{hb} + C \text{ *)}$$

§. 348. Zusatz.

Suchen wir noch den integrirenden Faktor $z = z_{x,y,y_1}$ für einen Differenzialausdruck der 2ten Ordnung

$$Q + P\cdot y_2,$$

wo Q und P Funktionen von x, y und y_1 sind, so finden wir, dem (§. 342.) zu Folge, zu dessen Bestimmung die beiden Gleichungen

I. $\partial(z\cdot Q)_y + \partial^2(z\cdot P)_x - \partial^{1,1}(z\cdot Q)_{x,y_1} +$
$+\left(2\partial^{1,1}(z\cdot P)_{x,y} - \partial^{1,1}(z\cdot Q)_{y,y_1}\right)\cdot y_1 + \partial^2(z\cdot P)_y\cdot y_1{}^2 = 0$

II. $2\partial(z\cdot P)_y + \partial^{1,1}(z\cdot P)_{x,y_1} - \partial^2(z\cdot Q)_{y_1} + \partial^{1,1}(z\cdot P)_{y,y_1}\cdot y_1 = 0,$

welche nach z Parzial-Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung sind, und denen der gesuchte integrirende Multiplikator z genügen muß.

Auch hier muß man nun versuchen (für einzelne gegebene Werthe von Q und von P), und nachsehen, ob nicht z entweder eine bloße Funktion von x, oder eine bloße Funktion von y, oder eine bloße Funktion von y_1 seyn kann.

---

*) Diese Methode findet nicht mehr Anwendung, so oft die gegebenen Werthe von α, β, a, b, der Gleichung $\alpha b - \beta a = 0$ genügen. Setzt man aber dann $\frac{\beta a}{\alpha}$ überall statt b, so reduzirt sich die gegebene Gleichung sogleich auf

$$(\alpha y + \beta x\cdot \partial y_x)\cdot\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}x^m y^n\right) = 0,$$

so daß entweder $1 - \frac{\beta}{\alpha}x^m y^n = 0$

oder $\alpha y + \beta x\cdot \partial y_x = 0$ d. h. $x^\alpha\cdot y^\beta = C$

ist. Diese letztere Gleichung ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung; die erstere dagegen ist nur ein singulärer Werth derselben, wenn sie nicht zufällig einmal in ein besonders Integral übergeht.

A. Versucht man z. B., ob z eine bloße Funktion von y allein seyn kann, so muß man in den Gleichungen (I. und 2.)

$$\partial z_x = \partial z_{y_1} = \partial^2 z_x = \partial^2 z_{y_1} = \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial^{1,1} z_{y,y_1} = 0$$

setzen, und man wird dann die entstehenden Gleichungen zwischen z, ∂z_y, $\partial^2 z_y$ näher betrachten und zusehen, ob ihnen durch ein z, welches bloß y enthält, aber nicht mehr x und y_1, genügt werden könne.

Beispiel. Für den Ausdruck

1) $$(y - x \cdot y_1 - y_1^2) + y \cdot y_2$$

hätte man

2) $Q = y - xy_1 - y_1^2$; 3) $P = y$.

Wenn man also versucht, ob nicht dasmal der gesuchte integrirende Faktor z bloß y enthalten könne, so muß man nehmen

$$\partial(z \cdot Q)_y = (y - x \cdot y_1 - y_1^2) \cdot \partial z_y + z;$$

$$\partial(z \cdot Q)_x = -y_1 \cdot z; \qquad \partial^{1,1}(z \cdot Q)_{x,y_1} = -z;$$

$$\partial(z \cdot Q)_{y_1} = -(x + 2y_1) \cdot z; \qquad \partial^{1,1}(z \cdot Q)_{y,y_1} = -(x + 2y_1) \cdot \partial z_y;$$

$$\partial^2(z \cdot Q)_{y_1} = -2z; \qquad \partial(z \cdot P)_y = z + y \cdot \partial z_y;$$

$$\partial(z \cdot P)_x = \partial^2(z \cdot P)_x = \partial^{1,1}(z \cdot P)_{x,y_1} = \partial^{1,1}(z \cdot P)_{y,y_1} = 0;$$

endlich $$\partial^2(z \cdot P)_y = 2\partial z_y + y \cdot \partial^2 z_y.$$

Die Gleichung (II.) geht dadurch über in

4) $$2z + y \cdot \partial z_y = 0 \text{ oder } \frac{2}{y} + \frac{\partial z_y}{z} = 0;$$

giebt also, weil hier die Veränderlichen getrennt sind, wenn man nach (§. 341. u. §. 343.) integrirt,

$$2 \log y + \log z = \log c;$$

d. h. $$y^2 \cdot z = c, \text{ oder } z = \frac{c}{y^2}, \text{ oder } z = \frac{1}{y^2},$$

wenn man $c = 1$ setzt.

Die Gleichung (I.) dagegen, welche auch noch identisch werden muß, geht jetzt über in

5) $$2z + (y + 3y_1^2) \cdot \partial z_y + y \cdot y_1^2 \cdot \partial^2 z_y = 0,$$

und wird in der That für $z = \frac{1}{y^2}$ identisch, so daß $z = \frac{1}{y^2}$ bei=

den Gleichungen (I. und II.) genügt, also wirklich einer der integrirenden Faktoren der Funktion in (1.) ist. *)

Auf diese Weise konnte der integrirende Faktor im Beispiel (5.) des (§. 343.) erhalten, und so von der Gleichung der 2ten Ordnung

$$y - x \cdot y_1 - y_1^2 + y \cdot y_2 = 0$$

ein erstes allgemeines Integral gefunden werden.

Allgemeineres hierüber findet man in der 3ten Abtheilung des XVIIten Kapitels (§. 385. und §. 386.).

B. Wir wollen nur noch einen zweiten besondern Fall herausheben, welcher in der Bewegungslehre vorkommt, und wo die gegebene Differenzialfunktion die Form hat

$$V = \partial^2 y_x + Y_y \quad \text{oder} \quad V = y_2 + Y_y,$$

während Y eine bloße Funktion von y allein seyn soll, ohne x und auch ohne Ableitungen von y zu enthalten. Der integrirende Faktor findet sich hier sehr schnell

$$z = \partial y_x = y_1.$$

Multiplizirt man damit die Funktion V, und integrirt man dann nach allem x, so erhält man

$$U = \int (V \cdot z) \cdot dx = \tfrac{1}{2} \partial y_x^2 + \int (Y \cdot \partial y_x) \cdot dx + C$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2} \partial y_x^2 + \int Y \cdot dy + C.$$

---

*) Hätte man die Gleichung (I.) zuerst genommen, also die (5.) zuerst erhalten, ehe man die Gleichung (4.) noch hatte, so hätte man die Gleichung (5.) so ordnen müssen, nämlich

6) $$2z + y \cdot \partial z_y + (3\partial z_y + y \cdot \partial^2 z_y) \cdot y_1^2 = 0.$$

Und da nun z nach der Annahme kein y_1 enthalten soll, so kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht einzeln

7) $2z + y \cdot \partial z_y = 0$ und 8) $3\partial z_y + y \cdot \partial^2 z_y = 0$

ist, wo man jedoch sogleich sieht, daß die Gleichung (8.) aus der Gleichung (7.) hervorgeht, wenn man die letztere nach allem y differenzirt.

Die andere Gleichung (II.) führt nachher wiederum zur Gleichung (7.), und man sieht daher, daß wenn die Gleichung (7.) d. h. die Gleichung (4.) erfüllt ist, dann auch die Gleichungen (I. und II.) identisch werden müssen.

Ist also eine Gleichung gegeben, bloß zwischen y und $\partial^2 y_x$, so kann man sie nach $\partial^2 y_x$ auflösen und

$$\partial^2 y_x = Y_y \quad \text{oder} \quad \partial^2 y_x - Y_y = 0$$

erhalten. Sie liefert dann sogleich, wenn man sie mit dem integrirenden Faktor ∂y_x multiplizirt, und integrirt:

$$\tfrac{1}{2}\partial y_x^2 = \int Y \cdot dy + C$$

oder $$\partial y_x = \sqrt{2(\int Y \cdot dy + C)}.$$

oder auch $$\partial y_x = \sqrt{2\int Y \cdot dy + c},$$

wenn man c statt 2C setzt, während $\int Y \cdot dy$ irgend eines seiner besonderen Integrale vorstellt. *)

§. 349. Zusatz.

Es ist unnöthig auch auf die besondere Betrachtung der Differenzialausdrücke der 3ten oder gar der 4ten und folgenden Ordnungen noch besonders einzugehen, da der (§. 344.) ganz allgemein für jede Ordnung das Nöthige gelehrt, die beiden in den (§§. 347. 348.) betrachteten Einzelfälle aber den Geist näher

---

*) Und wollte man von dieser eben erhaltenen Differenzial-Gleichung der 1ten Ordnung

$$\partial y_x = \sqrt{2\int Y \cdot dy + c}$$

wiederum das allgemeine Integral finden, so dürfte man nur diese Gleichung mit dem integrirenden Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\int Y \cdot dy + c}}$ multipliziren, um die Gleichung

$$\frac{\partial y_x}{\sqrt{2\int Y \cdot dy + c}} = 1$$

zu erhalten, in welcher die Veränderlichen getrennt sind, oder aus welcher sogleich, weil $\partial y_x = \frac{1}{\partial x_y}$ ist, diese andere Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2\int Y \cdot dy + c}} = \partial x_y$$

also $$\int \frac{1}{\sqrt{2\int Y \cdot dy + c}} \cdot dy = x$$

folgt, wo das zuletzt bloß angezeigte Integral ein allgemeines seyn, d. h. noch eine willkührliche Konstante c_1 in sich aufnehmen soll.

bezeichnet haben, in welchem man seine besonderen Arbeiten anzustellen hat.

Wir wollen daher nur noch die besondere Funktion V der nten Ordnung von der Form

1) $X+A_0 \cdot y+A_1 \cdot \partial y_x+A_2 \cdot \partial^2 y_x+A_3 \cdot \partial^3 y_x+\cdots+A_n \cdot \partial^n y_x,$

in welcher X, A_0, A_1, A_2, A_3, $\cdots$ A_n kein y und keine Ableitung von y enthalten, also bloß x in sich aufgenommeu haben, oder ganz konstant sind, und welche Funktion V dann eine, nach y und deren Ableitungen lineäre Differenzialfunktion genannt wird, etwas näher betrachten.

Sucht man nämlich für sie den integrirenden Faktor z nach der Bedingungsgleichung des (§. 344.), so überzeugt man sich gar bald, daß dieser Faktor z für diesen besonderen Fall eine bloße Funktion von x allein seyn kann, gegeben durch die Gleichung

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad A_0 \cdot z-\partial(A_1 \cdot z)+\partial^2(A_2 \cdot z)-\cdots \pm \partial^n(A_n \cdot z) = 0;$$

und daß, nachdem man z aus dieser Gleichung als bloße Funktion von x gefunden hat, dann das gesuchte Integral $U=\int(V \cdot z) \cdot dx$ nach (§. 339b.) in

$$2) \quad U = \int Xz.dx+$$
$$+[A_1 \cdot z-\partial(A_2 \cdot z)+\partial^2(A_3 \cdot z)-\cdots \mp \partial^{n-1}(A_n \cdot z)] \cdot y$$
$$+[A_2 \cdot z-\partial(A_3 \cdot z)+\cdots \pm \partial^{n-2}(A_n \cdot z)] \cdot \partial y_x$$
$$+[A_3 \cdot z-\cdots \mp \partial^{n-3}(A_n \cdot z)] \cdot \partial^2 y_x$$
$$+ \cdots\cdots$$
$$\vdots$$
$$+[A_n \cdot z] \cdot \partial^{n-1} y_x$$

übergeht, also genau wieder von derselben Form wird, als die V selbst (nur von einer um 1 niedrigern Ordnung in Bezug auf die Ableitungen von y) d. h. lineär, nämlich von der Form:

$$U = X_1+B_0 \cdot y+B_1 \cdot \partial y_x+B_2 \cdot \partial^2 y_x+\cdots+B_{n-1} \cdot \partial^{n-1} y_x,$$

während X_1 und B_0, B_1, B_2, $\cdots$ B_{n-1} höchstens Funktionen von x allein seyn werden.

Was endlich die Gleichung (C) betrifft, welche zur Bestimmung von z als z_x dient, so wird sie, wenn man bedenkt, daß nach (§. 97. d. IV. Th. d. S.)

$$\partial(A_1 \cdot z) = A_1 \cdot \partial z + z \cdot \partial A_1;$$
$$\partial^2(A_2 \cdot z) = A_2 \cdot \partial^2 z + 2 \cdot \partial A_2 \cdot \partial z + z \cdot \partial^2 A_2;$$
$$\partial^3(A_3 \cdot z) = A_3 \cdot \partial^3 z + 3\partial A_3 \cdot \partial^2 z + 3\partial^2 A_3 \cdot \partial z + z \cdot \partial^3 A_3;$$

u. s. w. f. ist, und sie demgemäß ordnet, ebenfalls die lineäre Form

$$C_0 \cdot z + C_1 \cdot \partial z_x + C_2 \cdot \partial^2 z_x + C_3 \cdot \partial^3 z_x + \cdots + C_n \cdot \partial^n z_x = 0$$

annehmen, und von der nten Ordnung seyn nach z, während C_0, C_1, C_2, ... C_n gegebene (d. h. aus A_0, A_1, A_2, ... A_n und deren Ableitungen nach x zusammensetzbare) Funktionen von x seyn werden. Alles kommt zuletzt darauf an, einen Werth von z zu finden, welcher dieser Gleichung (C) genügt.

Beispiel. Wenden wir dieses auf die lineäre Gleichung der 1sten Ordnung

$$1) \quad X + A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x = 0$$

an, wo X, A_0 und A_1 bloße Funktionen von x oder ganz konstant seyn sollen.

Die Gleichung zur Bestimmung des integrirenden Faktors z wird jetzt

$$2) \quad A_0 \cdot z - \partial(A_1 \cdot z) = 0$$

d. h.
$$(A_0 - \partial A_1) \cdot z - A_1 \cdot \partial z = 0.$$

Dividirt man diese durch $A_1 \cdot z$, so erhält man

$$3) \quad \frac{A_0 - \partial A_1}{A_1} - \frac{\partial z}{z} = 0,$$

in welcher Gleichung die Variablen getrennt sind, so daß man sogleich

$$4) \quad \int \frac{A_0 - \partial A_1}{A_1} \cdot dx = log\ z$$

oder
$$5) \quad z = e^{\int \frac{A_0 - \partial A_1}{A_1} \cdot dx}$$

erhält. Ist nun z gefunden, so hat man, wenn die Gleichung (1.) mit diesem z multiplizirt, und dann von dem Ausdruck zur Linken das Integral U nach dem Vorstehenden genommen wird, sogleich das allgemeine erste Integral der (1.), nämlich

$$6) \quad \int X \cdot z \cdot dx + A_1 \cdot z \cdot y = C,$$

wo man nur für z seinen Werth aus (5) setzen darf, um keinen anderen Schwierigkeiten zu begegnen, als denen der (Kap. VI—VIII. des IV. Th. d. S.).

Anmerkung. Man kann dieselben Resultate des (§. 349.) noch direkt erhalten, wenn man in

$$V \cdot z = X \cdot z + (A_0 \cdot z) \cdot y + (A_1 \cdot z) \cdot \partial y_x + (A_2 \cdot z) \cdot \partial^2 y_x + \cdots + (A_n \cdot z) \cdot \partial^n y_x$$

links und rechts das Integral nach x nimmt, dabei aber, wie bereits in (§. 339. I. für die dortige Funktion δV) geschehen ist, auf der rechten Seite theilweise integrirt. Man erhält dann sogleich

$$\begin{aligned} U = {} & \int Xz \cdot dx + \\ & + \int [A_0 \cdot z - \partial(A_1 \cdot z) + \partial^2(A_2 \cdot z) - \cdots \pm \partial^n(A_n \cdot z)] \cdot y \cdot dx \\ & + [A_1 \cdot z - \partial(A_2 \cdot z) + \cdots \mp \partial^{n-1}(A_n \cdot z)] \cdot y \\ & + [(A_2 z) - \cdots \pm \partial^{n-2}(A_n \cdot z)] \cdot \partial y_x \\ & + \cdots \cdots \\ & \vdots \\ & + [A_n \cdot z] \cdot \partial^{n-1} y_x ; \end{aligned}$$

und man hat also U wirklich gefunden, sobald man z als diejenige Funktion von x sich denkt, welche den unter dem Integralzeichen befindlichen, in den eckigen Klammern eingeschlossenen Faktor von y zu Null macht. Dies führt zu der Gleichung (C) und zu dem Resultat (2.) des (§. 349.).

§. 350.

Von den zweiten und höhern Integralen einer solchen Funktion V.

Es sey V wiederum, wie im (§. 339.), eine Funktion von $x, y, \partial y_x, \partial^2 y_x, \cdots \partial^n y_x$; es genüge solche zugleich der Bedingungsgleichung der Integrabilität (§. 339. II. ⊙), nämlich der Gleichung

$$\text{I.} \qquad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{y_a})\right]_{a+b=n} = 0;$$

es existirt also eine Funktion U von $x, y, \partial y, \cdots \partial^{n-1} y_x$ so, daß

1) $\partial U_{(x)} = V$ oder $U = \int V \cdot dx$

ist. — Soll nun diese Funktion U wiederum integrabel seyn, so muß auch noch diese 2te Bedingungsgleichung erfüllt seyn, nämlich

(ℂ)··· $$S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial U_{y_a})\right]_{a+b=n-1} = 0.$$

Setzt man aber hier statt ∂U_{y_a} seinen Werth aus (§. 339. III.), um alle U wegzuschaffen, und V hineinzubringen, so geht diese Gleichung (ℂ) sogleich über in

II. $$S\left[(-1)^a \cdot (a+1) \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+1}})\right]_{a+b=n-1} = 0$$

d. h. $$\partial V_{y_1} - 2\partial(\partial V_{y_2}) + 3\partial^2(\partial V_{y_3}) - 4\partial^3(\partial V_{y_4}) + \cdots \pm n \cdot \partial^{n-1}(\partial V_{y_n}) = 0.$$

Ist auch diese Gleichung (II.) erfüllt, so existirt eine Funktion T von $x, y, \partial y_x, \cdots \partial^{n-2} y_x$ so, daß

2) $\partial T = U$ oder $T = \int U \cdot dx$

also auch

3) $\partial^2 T = V$ oder $T = \int^2 V \cdot dx^2$ (⊙) ist.

Soll nun diese Funktion T abermals integrabel seyn, so muß T der Bedingungsgleichung

(♂)··· $$S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial T_{y_a})\right]_{a+b=n-2} = 0$$

genügen, welche jedoch, wenn man statt ∂T_{y_a} ihren Werth in U ausgedrückt findet (nach §. 339. III.), und solchen hier herein substituirt, in

(♂)··· $$S\left[(-1)^a \cdot (a+1) \cdot \partial^a(\partial U_{y_{a+1}})\right]_{a+b=n-2} = 0$$

übergeht. Setzt man aber hier wieder, um in die Gleichung bloß V hineinzubringen, statt $\partial U_{y_{a+1}}$ ihren Werth aus (§. 339. III.), so wird dieselbe Bedingungsgleichung die Form

III. $$S\left[(-1)^a \cdot (a+2)_2 \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+2}})\right]_{a+b=n-2} = 0$$ *)

*) Das Zeichen $(a+2)_2$ bedeutet nach (§. §. 350. 401. 402. b. II.

d. h. $\partial V_{y_2} - 3\partial(\partial V_{y_3}) + 6\partial^2(\partial V_{y_4}) - 10\partial^3(\partial V_{y_5}) +$

$$+ \cdots \pm \frac{n(n-1)}{2} \cdot \partial^{n-2}(\partial V_{y_n}) = 0$$

annehmen.

Sind also die Gleichungen (I. II. und III.) alle erfüllt, so hat die gegebene Funktion V ein 3tes Integral in dem Sinne des (§. 339.), d. h. es existirt dann eine Funktion T so, daß

$$\partial^3 T_{(x)} = V \quad \text{oder} \quad \partial^3 T = V$$

wird, während y jede unbestimmte Funktion von x vorstellt.

Und soll die gegebene Funktion V ein mtes Integral haben können, so müssen m Bedingungsgleichungen erfüllt seyn; nämlich auser den Bedingungsgleichungen (I. II. und III.), noch

$$\text{IV.} \quad S\Big[(-1)^a \cdot (a+3)_3 \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+3}})\Big]_{a+b=n-3} = 0$$

$$\text{V.} \quad S\Big[(-1)^a \cdot (a+4)_4 \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+4}})\Big]_{a+b=n-4} = 0$$

u. s. w. f. bis zuletzt die mte Gleichung erfüllt ist, nämlich

$$(\odot) \quad S\Big[(-1)^a \cdot (a+m-1)_{m-1} \cdot \partial^a(\partial V_{y_{a+m-1}})\Big]_{a+b=n-m+1} = 0.$$

Weil jedoch aus der Gleichung ($\odot$) alle die frühern Gleichungen (I. II. III. IV. V. ꝛc. ꝛc.) hervorgehen, wenn man in ihr nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. ꝛc. statt m setzt, so folgt, daß die gegebene Funktion V ein so vielfaches Integral haben wird (während y jede unbestimmte Funktion von x bleibt), als identische Gleichungen aus der Gleichung ($\odot$) hervorgehen, wenn man in ihr in der Ordnung die Werthe 1, 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. statt m setzt.

Th. d. S.) den 2ten Binomial-Koeffizienten der $a+2$ten Potenz irgend eines Binomimus $a+b$; also daß man hat $(a+2)_2 = \frac{(a+2)(a+1)}{1 \cdot 2}$.

Ebenso bedeutet allgemein m_c den cten Binomial-Koeffizienten der mten Potenz von $a+b$; so daß man hat

$$m_c = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-[c-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m}.$$

Anmerkung I. Ist gegeben die Differenzial-Gleichung der nten Ordnung

$$V = 0,$$

so könnte man ihr erst nach (§. 345.) die Form

$$1) \qquad V = Q + P \cdot y_n = 0$$

geben; und nun den integrirenden Faktor z für dieses V suchen, dabei aber statt der Gleichung (⊙ der Anmerkung zu §. 345.) die Gleichung (♁) daselbst nehmen, nämlich

$$(A)\cdots \quad S\Big[(-1)^c \cdot \partial^c z \cdot \times (-1)^b \cdot (c+b)_b \cdot \partial^b (\partial V_{y_{c+b}})\Big] = 0.$$
$$c+b+b=n$$

Hat man nun daraus z gefunden, und dann noch

$$2) \qquad U = \int (z \cdot V) \cdot dx;$$

so ist, wenn man die willkührliche Konstante bereits in U aufgenommen sich denkt,

$$3) \qquad U = 0$$

das allgemeine erste Integral von $V = 0$.

II. Sucht man nun für U wiederum den integrirenden Faktor z_1, gerade wieder nach (♁ der Anmerkung zu §. 345.) so erhält man zu seiner Bestimmung die Gleichung

$$(B)\cdots \quad S\Big[(-1)^c \cdot \partial^c z_1 \cdot (-1)^b \cdot (c+b)_b \cdot \partial^b (\partial U_{y_{c+b}})\Big] = 0$$
$$c+b+b=n-1$$

III. Aus dieser Gleichung (B.) kann man nun aber wiederum, wenn man will, die Funktion U eliminiren, indem man wie im (§. 350.) statt $\partial U_{y_{c+b}}$ aus (§. 339. III.) seinen Werth setzt, (wo man jedoch $z \cdot V$ statt des dortigen V zu schreiben hat, weil hier $U = \int (z \cdot V) \cdot dx$ ist, während dort $U = \int V \cdot dx$ war). Dann erhält man, wenn man zu Hilfe nimmt, daß

$$(c+b)_b = \frac{(c+b)!}{c!\ b!} = \frac{(c+1)^{b|1}}{b!} = \frac{1^{a|1} \cdot (c+1)^{b|1}}{a!\ \ b!}$$

und

$$S\Big[(c+b)_b\Big] = S\left[\frac{1^{a|1} \cdot (c+1)^{b|1}}{a!\ b!}\right] = \frac{(c+2)^{f|1}}{f!} = (c+f+1)_i$$
$$a+b=f \qquad\qquad a+b=f$$

ist (nach §. §. 351. 408. und 340. d. II. Th. d. S.), statt der Gleichung (B.) sogleich die Gleichung

$$(C)\cdots\quad S\Big[(-1)^c\cdot\partial^c z_1\times(-1)^f\cdot(c+f+1)_f\cdot\partial^f(z\cdot\partial V_{y_{c+f+1}})\Big]_{c+f+b=n-1}=0,$$

welche zur Bestimmung von z_1 dient, und nicht mehr U sondern bloß V enthält, nebst dem aus (A.) bereits gefundenen Multiplikator z. *)

IV. Es möchte nun bei dem ersten Anblick scheinen, als könnte, sobald nur aus der Gleichung (A.) der integrirende Faktor z gefunden ist, aus der Gleichung (C.) sogleich der andere integrirende Faktor z_1 gefunden werden, ohne daß U selbst bekannt zu seyn braucht. Bedenkt man aber, daß nach (Anmerkung zu §. 345.) aus der Gleichung (A.), mittelst der Gleichungen $V=0$, $\partial V=0$, &c., die Ableitungen y_n, y_{n+1}, &c. &c. eliminirt werden müssen, ehe man z selbst finden kann; so folgt, daß man auch aus der Gleichung (C.) nicht eher z_1 finden kann, als bis man abermals nicht bloß y_n, y_{n+1}, &c. &c., sondern auch y_{n-1} eliminirt hat, (weil z_1 auch kein y_{n-1} enthalten darf), und daß sich y_{n-1} nur mittelst der Gleichung $\int(z\cdot V)\cdot dx=0$ eliminiren läßt; so folgt, daß auch dieser oben vermeinte Vortheil im Allgemeinen nur illusorisch seyn und nicht statt finden wird.

V. Aber auch, wenn z gefunden wäre, daraus

$$U=\int(z\cdot V)\cdot dx=0$$

als das erste allgemeine Integral von $V=0$ hergestellt, so wie mittelst der Gleichung $U=0$ die Ableitung y_{n-1} auch noch aus der Gleichung (C.) weggeschafft, so würde man zwar aus

---

*) Diese Gleichung (C.) auf gewöhnliche Art geschrieben, sieht so aus, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&z_1\cdot[z\cdot\partial V_{y_1}-2\partial(z\cdot\partial V_{y_2})+3\partial^2(z\cdot\partial V_{y_3})-4\partial^3(z\cdot\partial V_{y_4})+\cdots]\\
&-\partial z_1\cdot[z\cdot\partial V_{y_2}-3\,\partial(z\cdot\partial V_{y_3})+6\partial^2(z\cdot\partial V_{y_4})-\cdots]\\
&+\partial^2 z_1\cdot[z\cdot\partial V_{y_3}-4\,\partial(z\cdot\partial V_{y_4})+\cdots]\\
&+\quad\cdots\cdots\cdots\\
&+\partial^{n-1}z_1\cdot[z\cdot\partial V_{y_{n-1}}]
\end{aligned}\right\}=0.$$

der Gleichung (C.) Werthe von z_1 bekommen; aber vielleicht kein einziger darunter ist ein integrirender Faktor, in so ferne U selbst, in seiner ursprünglichen Gestalt vielleicht gar keinen integrirenden Faktor hat, während für die Gleichung $U = 0$, wenn sie nach y_{n-1} aufgelößt, also auf die Form $Q' + P' \cdot y_{n-1} = 0$ gebracht wird, ein integrirender Faktor existirt (d. h. für die Funktion $Q' + P' \cdot y_{n-1}$).

Das hier in der Anmerkung für Gleichungen angeführte Verfahren ist daher einmal schon unbrauchbar, weil nach (§. 345. Anmerkg.) die hier gebrauchten Gleichungen (A. und B.) zur Bestimmung der integrirenden Faktoren z und z_1 an sich schon unbrauchbar gefunden worden sind; und dann ist es wiederum unbrauchbar, weil man aus der Gleichung (C.), obgleich sie U nicht zu enthalten scheint, den integrirenden Faktor doch nicht finden kann, so lange nicht U bekannt ist; und endlich ist sie zum drittenmale unbrauchbar, weil in den meisten Fällen das erste Integral $U = 0$ erst wird umgeformt werden müssen (nämlich auf die Form $Q' + P' \cdot y_{n-1} = 0$ gebracht), ehe man einen integrirenden Faktor dafür suchen kann, wo denn, weil man zwischen $Q' + P' \cdot y_{n-1}$, wenn solches statt U gesetzt wird, und zwischen V keine Gleichung mehr hat, so daß also dann an ein Elimininiren der Funktion U, um eine ähnliche Gleichung, wie die (C.) zur Bestimmung von z_1 zu erhalten, nicht weiter zu denken ist.

Zweite Abtheilung.

Von der Integration der Differenzialgleichungen zwischen nur zwei Veränderlichen, mittelst Transformation.

Vorerinnerung.

In der ersten Abtheilung dieses Kapitels haben wir zwei Methoden kennen gelernt, die Differenzialgleichungen

$$V = 0$$

zwischen zwei Veränderlichen zu integriren. Entweder es entspricht nämlich die Funktion V den Bedingungsgleichungen der Integrabilität, und dann nimmt man

$$U = \int V \cdot dx = c$$

als das allgemeine Integral von $V = 0$. Oder es entspricht V den Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht; dann kann man einen integrirenden Faktor z suchen, so daß $z \cdot V$ den Bedingungen der Integrabilität entspricht, und dann ist

$$U = \int (z \cdot V) \cdot dx = c$$

das gesuchte allgemeine Integral von $V = 0$.

Weil aber dieser integrirende Faktor, wenn man das allgemeine Integral nicht schon kennt, nur in den seltensten Fällen gefunden werden kann, so kommt jetzt zunächst alles darauf an, durch Einführung neuer Veränderlichen die gegebene Gleichung $V = 0$ so umzuändern, daß auf die neue Gleichung eine der beiden Methoden der ersten Abtheilung wirklich und möglichst bequem in Anwendung gebracht werden könne.

§. 351.

Das nächste, was man aber thun kann, um eine gegebene Gleichung

$$V_{x,y,y_1,y_2 \cdots y_n} = 0,$$

wo $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Ableitungen $\partial y_x, \partial^2 y_x, \cdots \partial^n y_x$ vorstellen, in eine andere Form zu bringen, ohne gerade einen neuen Veränderlichen einzuführen, ist, daß man nach dem (§. 60. d. III. Th. d. S.)

$$\frac{1}{\partial x_y} \quad \text{statt} \quad \partial y_x \quad \text{oder} \quad y_1;$$

$$-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3} \quad \text{statt} \quad \partial^2 y_x \quad \text{oder} \quad y_2;$$

$$\frac{3\partial^2 x_y - \partial x_y \cdot \partial^3 x_y}{\partial x_y^5} \quad \text{statt} \quad \partial^3 y_x \quad \text{oder} \quad y_3;$$

u. s. w. f. substituirt, so daß die neue Gleichung, welche dadurch aus $V = 0$ hervorgeht, jetzt y als den unabhängigen Veränderlichen, und außerdem x als eine gesuchte Funktion von y, so wie die Ableitungen von x nach y enthalten wird.

Als einen besondern Fall heben wir hervor die Gleichung

$$\partial y_x = Y_y,$$

wo Y bloß y aber kein x enthält. Man erhält sogleich

$$\partial x_y = \frac{1}{Y},$$

und dann

$$x = \int \frac{1}{Y} \cdot dy + C,$$

als Integral dieser Gleichung (Vergl. §. 348. zu Ende.).

Außerdem bemerke man noch folgende Beispiele:

Beispiel 1. Wäre z. B. gegeben die Gleichung

1) $$x \cdot \partial y^3 - y \cdot \partial y^2 - \partial y - x \cdot \partial^2 y = 0,$$

wo alle ∂ Ableitungen nach x vorstellen; so würde man durch diese Substitution, und wenn man die entstehende Gleichung sogleich mit ∂x_y^3 multiplizirt, d. h. die Brüche wegschafft, diese andere Gleichung erhalten:

2) $$x + x \cdot \partial^2 x - y \cdot \partial x - \partial x^2 = 0,$$

wo die ∂ lauter Ableitungen nach y vorstellen. Während nun die erste Gleichung integrabel wird, wenn man sie mit $\frac{1}{x^2 \cdot \partial y_x^2}$ multiplizirt, ist der integrirende Faktor der 2ten Gleichung weit leichter zu finden, weil er bloß $\frac{1}{x^2}$, d. h. eine bloße Funktion von x allein ist. Multiplizirt man dann die Gleichung (2.) mit diesem Faktor $\frac{1}{x^2}$, und integrirt man hernach nach (§. 339.), so erhält man sogleich

3) $$\frac{y + \partial x}{x} = c \quad \text{oder} \quad y + \partial x = cx \quad \text{oder} \quad (y - cx) + \partial x_y = 0;$$

für welche Gleichung man dann sogleich wieder

4) $$(y - cx) \cdot \partial y_x + 1 = 0$$ schreiben kann.

Beispiel 2. Wäre gegeben die Gleichung

$$\partial^2 y_x \cdot \sqrt{ay} = 1 \quad \text{oder} \quad \partial^2 y_x = \frac{1}{\sqrt{ay}},$$

so erhielte man nach (§. 348.) zum integrirenden Faktor $z = \partial y_x$, und zum allgemeinen ersten Integral

$$\tfrac{1}{2} \partial y_x^2 = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ay} + C = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{a}} + C.$$

Führt man, um diese Gleichung bequemer auf's neue integriren zu können, eine andere Konstante c so ein, daß

$$C = \frac{2c}{\sqrt{a}}$$

wird, so erhält man

$$\partial y_x = \frac{2}{\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt{c+\sqrt{y}},$$

und nach unserm gegenwärtigen Paragraphen

$$\partial x_y = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{c+\sqrt{y}}};$$

demnach

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{c+\sqrt{y}}} \cdot dy$$

d. h.

$$x = \tfrac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot (\sqrt{y} - 2c) \cdot \sqrt{c+\sqrt{y}} + c_1.$$

Anmerkung. Ist überhaupt die gegebene Differenzialgleichung nur von der 1sten Ordnung und von der Form

$$M + N \cdot \partial y_x = 0,$$

wo M und N bloß x und y enthalten, so erhält sie durch diese Substitution allemal sogleich diese andere Form

$$M \cdot \partial x_y + N = 0.$$

§. 352.

Ist dieses Verfahren des (§. 351.) ohne Erfolg geblieben, d. h., kann man von der neu erhaltenen Gleichung das allgemeine erste Integral nicht finden, weil weder diese neue Funktion V integrabel ist, noch auch ein integrirender Faktor desselben, obgleich er existirt, gefunden wird, so muß man die gegebene Gleichung

$$V_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n} = 0$$

so vorrichten, daß 1 oder 2 neue Veränderliche dergestalt eingeführt werden können, daß jeder der neuen Veränderlichen noch nach belieben der Unabhängige werden kann, oder ein Abhängiger. Zu dem Ende muß man in $V = 0$, dem (§. 59. des III. Th. d. S.) zu Folge

$\frac{\partial y}{\partial x}$ statt ∂y_x oder y_1

$\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}$ statt $\partial^2 y_x$ oder y_2

u. s. w. f. substituiren, wo die bloßen ∂ jetzt Ableitungen nach einem noch ganz beliebigen und durchaus noch nicht näher bezeichneten Veränderlichen bedeuten, so daß die neue Gleichung auch wiederum sogleich die im (§. 351.) erhaltene Form annehmen wird, sobald man sich alle diese ∂ nach y genommen denkt, weil dann $\partial y = \partial y_y = 1$, $\partial^2 y = \partial^3 y$ ꝛc. ꝛc. $= 0$ genommen werden muß. Und eben so ist die gegebene Form V selbst wieder in dieser neuen Form enthalten, sobald man in letzterer alle ∂ nach x genommen sich denkt, weil dann

$$\partial x = \partial x_x = 1, \quad \partial^2 x = \partial^3 x = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0$$

genommen werden muß.

Wollte man z. B. die vorhin gegebene Gleichung

1) $x \cdot \partial y^3 - y \cdot \partial y^2 - \partial y - x \cdot \partial^2 y = 0,$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach x bedeuten, in dem jetzigen Sinne umformen, so erhielte man, indem man sie zugleich mit ∂x^3 wegmultiplizirte, die neue Gleichung

2) $x \cdot \partial y^3 - y \cdot \partial y^2 \cdot \partial x - \partial y \cdot \partial x^2 - x \cdot \partial x \cdot \partial^2 y + x \cdot \partial y \cdot \partial^2 x = 0,$

wo die bloßen ∂ jetzt Ableitungen nach einem ganz beliebigen neuen Veränderlichen bedeuten. Denkt man sich nachgehends x unter dem neuen Veränderlichen, so hat man

$$\partial x = 1, \quad \partial^2 x = 0,$$

und die Gleichung (2.) zieht sich wieder auf die (1.) zurück. — Denkt man sich aber unter dem neuen Veränderlichen jetzt y, so hat man

$$\partial y = 1, \quad \partial^2 y = 0,$$

und die Gleichung (2.) verwandelt sich jetzt in folgende

3) $x - y \cdot \partial x - \partial x^2 + x \cdot \partial^2 x = 0,$

wo die ∂ Ableitungen noch y vorstellen. Diese Gleichung ist aber keine andere als die Gleichung (2 im Beispiel 1. zu §. 351).

Für den folgenden Zweck muß aber die Gleichung (2.) hier in ihrer ganzen Allgemeinheit stehen bleiben, um noch jeden neuen Veränderlichen eben so gut als diese beiden alten zum unabhängigen Veränderlichen annehmen zu können.

Anmerkung 1. Die Gleichung der 1ten Ordnung von der Form

$$M + N \cdot \partial y_x = 0$$

wo M und N bloß x und y enthalten, nimmt auf diese Substitution sogleich diese andere Form an, nämlich

$$M \cdot \partial x + N \cdot \partial y = 0.$$

II. Die Gleichung der 2ten Ordnung von der Form

$$P + Q \cdot \partial y_x + R \cdot \partial y_x^2 + M \cdot \partial^2 y_x = 0$$

wo P, Q, R und M bloß x und y enthalten, nimmt dagegen sogleich die Form an

$$P \cdot \partial x^2 + Q \cdot \partial x \cdot \partial y + R \cdot \partial y^2 + M \cdot \partial^2 y - M \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \partial^2 x = 0,$$

und geht, wenn man jetzt y als den unabhängigen Veränderlichen ansehen will, sogleich in

$$P \cdot \partial x_y^2 + Q \cdot \partial x_y + R - \frac{M}{\partial x_y} \cdot \partial^2 x_y = 0$$

über. — Umgekehrt, hat man letztere Gleichung, so kann man sogleich die viel bequemere erstere daraus machen.

§. 353.

Ist aber die gegebene Differenzialgleichung $V = 0$ auf diese neue Form gebracht,

1) $$W_{x, x_1, x_2, \cdots x_n, y, y_1, y_2, \cdots y_n},$$

wo $x_1, x_2, \cdots x_n, y_1, y_2, \cdots y_n$ die Ableitungen vorstellen von x und y nach irgend einem beliebigen Veränderlichen, der selber x, oder y, der aber auch irgend ein dritter seyn kann; so kann man nun eine beliebige Gleichung zwischen x, y und einem neuen veränderlichen v, etwa

2) $$f_{x,y,v} = 0$$

annehmen. Es wird dadurch v selbst eine Funktion von x und y, aber auch y eine Funktion von x und v, so wie x eine Funktion von y und v. Weil aber die Gleichung $W = 0$, zwischen x und y eine Abhängigkeit voraussetzt, so hat man zwei Gleichungen zwischen x, y und v; und dadurch sind also je zwei dieser Buchstaben in den dritten ausgedrückt, und deshalb wiederum sind x, y und v Funktionen desjenigen Veränderlichen, nach wel-

chem in $W = 0$ die Ableitungen genommen gedacht sind. — Differenzirt man daher die Gleichung $f = 0$, weil sie in dem letzteren Sinne identisch $0 = 0$ ist, nach diesem unabhängigen Veränderlichen, so erhält man noch

$$(\mathfrak{C}) \ldots\ldots \begin{cases} \partial f = 0 & \text{d. h. } \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_v \cdot \partial v = 0; \\ \partial^2 f = 0; & \text{u. s. w. f.;} \qquad \text{zuletzt } \partial^n f = 0. \end{cases}$$

Aus den $n+2$ Gleichungen (12 und $\mathfrak{C}$) kann man nachgehends einen der 2 Veränderlichen x (oder y) mit allen seinen n Ableitungen eliminiren, und man wird die neue Gleichung haben, zwischen v und y (oder x) und den Ableitungen derselben, immer noch nach jenem, bis jetzt willkührlich gehaltenen, unabhängigen Veränderlichen genommen. Zuletzt kann man sich darüber entscheiden, ob v oder y (oder x) als der neue unabhängige Veränderliche angesehen werden soll, wodurch die Gleichung erst ihre einfachste Gestalt wieder erhält.

Die neue Gleichung kann daher eine der 4 Formen annehmen,

6) $W'_{x,v,v_1,v_2,\ldots v_n} = 0$ oder 7) $W''_{y,v,v_1,v_2,\ldots v_n} = 0$

oder

8) $W'''_{v,x,x_1,x_2,\ldots x_n} = 0$ oder 9) $W_{v,y,y_1,y_2,\ldots y_n} = 0$,

wo in (8. und 9.) Ableitungen nach v, in (6.) dagegen Ableitungen nach x, in (7.) aber Ableitungen nach y verstanden sind.

Hätte man z. B. gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

1) $P + Q \cdot \partial y_x + R \cdot \partial y_x^2 + M \cdot \partial^2 y_x = 0;$

wo P, Q, R und M bloß x und y enthalten sollen, und sie zunächst (nach §. 352.) auf die Form gebracht

2) $P \cdot \partial x^2 + Q \cdot \partial x \cdot \partial y + R \cdot \partial y^2 + M \cdot \partial^2 y_x - M \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \partial^2 x = 0;$

hätte man dann aus

3) $f_{x,y,v} = 0$

abgeleitet

4) $\partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_v \cdot \partial v = 0,$

5) $\partial f_x \cdot \partial^2 x + \partial f_y \cdot \partial^2 y + \partial f_v \cdot \partial^2 v + \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 +$
$+ \partial^2 f_v \cdot \partial v^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + 2\partial^{1,1} f_{x,v} \cdot \partial x \cdot \partial v +$
$+ 2\partial^{1,1} f_{y,v} \cdot \partial y \cdot \partial v = 0:$

so könnte man aus den 4 Gleichungen (2.—5.) entweder y, ∂y und $\partial^2 y$ eliminiren, und man wird eine Gleichung zwischen

$$x,\ \partial x,\ \partial^2 x,\ v,\ \partial v,\ \partial^2 v$$

erhalten, welche, wenn man x als den unabhängigen Veränderlichen ansieht, sogleich, weil dann $\partial x = 1$, $\partial^2 x = 0$ ist, in eine Gleichung zwischen x, v, ∂v_x und $\partial^2 v_x$ übergeht; welche aber, wenn v als der Unabhängige angesehen wird, so daß $\partial v = 1$, $\partial^2 v = 0$ ist, auch eben so schnell in eine Gleichung zwischen v, x, ∂x_v und $\partial^2 x_v$ übergehen wird. — Hernach könnte man aber aus den 4 Gleichungen (2.—5.) auch x, ∂x und $\partial^2 x$ eliminiren, und dann wird man eine Gleichung zwischen y, ∂y, $\partial^2 y$, v, ∂v, $\partial^2 v$ erhalten, welche augenblicklich entweder in eine Gleichung zwischen y, v, ∂v_y und $\partial^2 v_y$ oder in eine Gleichung zwischen v, y, ∂y_v und $\partial^2 y_v$ übergeht.

Von diesen 4 Gleichungen, welche aus der gegebenen hervorgegangen sind, und von denen jede die gegebene ganz und vollkommen ersetzt, muß man nun diejenige nehmen, welche vermöge der geschickten Wahl der beliebig angenommenen Gleichung

$$f_{x,y,v} = 0$$

zur Integration, nach der 1sten Abtheilung dieses Kapitels, oder doch zur weiteren Behandlung am geeignetsten scheint. Ist sie integrirt, so giebt sie, wenn man aus ihr und $f = 0$ den Veränderlichen v eliminirt, sogleich wiederum eine Gleichung zwischen y und x.

Anmerkung I. In dem Falle, wo, obgleich ein neuer Veränderlicher v eingeführt worden ist, der unabhängige Veränderliche x als solcher beibehalten werden soll, ist es natürlich nicht nöthig, die gegebene Gleichung $V = 0$ zwischen x, y, ∂y_x, $\cdots$ $\partial^n y_x$ vorher dem (§. 352.) gemäß erst umzuformen, sondern man kann sie, so wie sie ist, beibehalten, muß dagegen in den Gleichungen $\partial f = 0$, $\partial^2 f = 0$, ꝛc. ꝛc. die Ableitungen ebenfalls nach x nehmen, so daß man z. B.

$$\partial f = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_v \cdot \partial v_x = 0,$$

u. s. w. f. erhält.

II. Soll aber der andere Veränderliche y der unabhängige

werden, so kann man die Gleichung auch sogleich bloß nach (§. 351.) dieser Annahme gemäß umformen, und dann die Ableitungen von $f = 0$ ebenfalls sogleich nach allem y nehmen, so daß man z. B.

$$\partial f = \partial f_x \cdot \partial x_y + \partial f_y + \partial f_v \cdot \partial v_y = 0,$$

u. s. w. f. erhält.

§. 354.

Der Vortheil dieser Umformung richtet sich aber nach der glücklichen Wahl der Gleichung

$$f_{x,y,v} = 0,$$

welche auch entweder x gar nicht oder y gar nicht enthalten, also entweder bloß $f_{x,v} = 0$, oder bloß $f_{y,v} = 0$ seyn kann. Diese für f gewählte Form hat nämlich zu bewirken, daß die neue Gleichung nach einer der beiden Methoden der ersten Abtheilung soll behandelt werden können, oder doch, daß sie geeignet sey, um weitere Integrations-Versuche mit der Hoffnung auf einigen Erfolg anstellen zu können. Da sich nun im Allgemeinen nichts weiter als dieses festsetzen läßt, so mag die Betrachtung nachstehender speziellen Fälle das Wesentlichste der Anwendung hervorblicken lassen.

I. Sind in der Gleichung der ersten Ordnung

$$1) \quad M + N \cdot \partial y_x = 0$$

oder $$2) \quad M \cdot \partial x + N \cdot \partial y = 0,$$

M und N homogene Funktionen von x und y, von der rten Dimension, so setzt man, in so ferne man die bekannte Eigenschaft der homogenen Funktionen im Auge hat (man s. IV. Th. d. S. von pag. 33. ab),

$$3) \quad y = x \cdot v \quad \text{statt} \quad f = 0,$$

erhält daraus

$$4) \quad \partial y = x \cdot \partial v + v \cdot \partial x \quad \text{statt} \quad \partial f = 0,$$

während $$5) \; M = x^r \cdot V \quad \text{und} \quad 6) \; N = x^r \cdot V'$$

wird, wo V und V′ Funktionen von v allein seyn werden. Die Gleichung (2.) wird nun, nachdem y und ∂y eliminirt worden sind, diese:

$$x^r \cdot V \cdot \partial x + x^r \cdot V' \cdot (x \cdot \partial v + v \cdot \partial x) = 0,$$

d. h. 7) $(V + v \cdot V') \cdot \partial x + x \cdot V' \cdot \partial v = 0$

oder 8) $(V + v \cdot V') + x \cdot V' \cdot \partial v_x = 0$

oder 9) $(V + v \cdot V') \cdot \partial x_v + x \cdot V' = 0.$

Jede dieser Gleichungen (8. oder 9.) ist aber nun leicht zu integriren, weil in ihr die Veränderlichen getrennt werden können (§. 341.). Dividirt man nämlich die (8.) durch $(V + v \cdot V') \cdot x$, so erhält man

$$10) \quad \frac{1}{x} + \frac{V'}{V + v \cdot V'} \cdot \partial v_x = 0,$$

und diese giebt sogleich, wenn man nach allem x das Integral nimmt:

$$11) \quad log\, x + \int \frac{V'}{V + v \cdot V'} \cdot dv = c$$

oder 12) $C = x \cdot e^{\int \frac{V'}{V + v \cdot V'} \cdot dv}$,

wo man statt des angezeigten Integrals irgend eines der besondern Integrale nimmt.

Dividirt man aber die (9.) durch $(V + v \cdot V') \cdot x$, so ergiebt sich

$$13) \quad \frac{\partial x_v}{x} + \frac{V'}{V + v \cdot V'} = 0,$$

welche, wenn man links nach allem v das Integral nimmt, wiederum zu den Gleichungen (11. und 12.) führt. *)

---

*) Da man hier die gegebene Gleichung

$$M + N \cdot \partial y = 0$$

durch $x^{r+1} \cdot (V + v \cdot V')$ dividirt hat, um die (10.) zu erhalten, so ist demnach $\frac{1}{x^{r+1} \cdot (V + v \cdot V')}$ d. h. $\frac{1}{x \cdot x^r \cdot V + x^r \cdot V' \cdot y}$ d. h. $\frac{1}{M \cdot x + N \cdot y}$ der integrirende Faktor der Gleichung $M + N \cdot \partial y_x = 0$, so oft M und N homogene Funktionen von einer und derselben rten Dimension sind. Auf diesem Wege hat man aber diesen, bereits (§. 347.) angegebenen integrirenden Faktor der homogenen Gleichungen zuerst gefunden.

Beispiel 1. Die Gleichung der ersten Ordnung

1) $x \cdot \partial x + y \cdot \partial y = ny \cdot \partial x$

oder 2) $(x - ny) \cdot \partial x + y \cdot \partial y = 0$

giebt, sobald 3) $y = xv$ gesetzt wird,

$$M = x - ny = x \cdot (1 - nv), \text{ also } V = 1 - nv,$$

$$N = y = xv, \text{ also } V' = v.$$

Demnach ist jetzt

$$\int \frac{V'}{V + vV'} \cdot dv = \int \frac{v}{1 - nv + v^2} \cdot dv.$$

Also ist das Integral der Gleichung (1.)

$$4) \quad log\, x + \int \frac{v}{1 - nv + v^2} \cdot dv = C,$$

wo C die willkührliche Konstante ist, während statt $\int \frac{v}{1 - nv + v^2} \cdot dv$ irgend eines der, nach dem (IV. Th. d. S.) zu findenden besondern Integrale vorstellt, wenn man nur aus (4. u. 3.) v wiederum eliminirt.

Wäre $n = 2$, so hätte man

$$\int \frac{v}{1 - nv + v^2} \cdot dv = \int \frac{v}{(1 - v)^2} \cdot dv = log\,(1 - v) + \frac{1}{1 - v};$$

also würde die Gleichung (4.) jetzt werden

$$5) \quad log\, x + log\,(1 - v) + \frac{1}{1 - v} = C$$

oder $$log\, x + log\,(1 - v) + log\, e^{\frac{1}{1 - v}} = log\, c$$

d. h. $$x \cdot (1 - v) \cdot e^{\frac{1}{1 - v}} = c$$

d. h., wenn man v eliminirt,

$$6) \quad (x - y) \cdot e^{\frac{x}{x - y}} = c;$$

und dies ist also das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung

$$x + y \cdot \partial y_x = 2y \quad \text{oder} \quad (x - 2y) \partial x + y \cdot \partial y = 0.$$

Beispiel 2. Die Gleichung der ersten Ordnung

1) $$x \cdot \partial y - y \cdot \partial x = \partial x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

giebt, wenn

2) $$y = x \cdot v \quad \text{also} \quad \partial y = x \cdot \partial v + v \cdot \partial x$$

gesetzt wird,

3) $$x \cdot \partial v = \partial x \cdot \sqrt{1+v^2},$$

in welcher letztern Gleichung die Variablen leicht getrennt werden können, so daß man

4) $$\frac{\partial v}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\partial x}{x}$$

erhält. Nimmt man hier links und rechts die Integrale, so hat man, weil $\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = log\,(v+\sqrt{1+v^2})$ ist,

5) $$log\,(v+\sqrt{1+v^2}) = log\,x + C = log\,cx$$

oder 6) $$v+\sqrt{1+v^2} = cx,$$

welche Gleichung, wenn man aus (2. und 6.) v eliminirt,

7) $y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2$ oder $c^2x^2-2cy-1 = 0$

liefert, als das allgemeine Integral der Gleichung (1.).

Beispiel 3. Wäre gegeben die Gleichung der ersten Ordnung

1) $$x^3 \cdot \partial y - x^2 y \cdot \partial x + y^3 \cdot \partial x - x y^2 \cdot \partial y = 0,$$

so erhielte man, indem

2) $$y = x \cdot v \quad \text{also} \quad \partial y = x \cdot \partial v + v \cdot \partial x$$

gesetzt wird,

3) $$x^3 \cdot (1-v^2) \cdot \partial v = 0 \quad \text{oder} \quad \partial v = 0;$$

also 4) $$v = c,$$

und man hat daher

5) $$\frac{y}{x} = c \quad \text{oder} \quad y = cx$$

als das allgemeine Integral der (1.). *)

II. Ist gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung von der Form

1) $$(a \cdot x^m \cdot y^n + b \cdot x^p \cdot y^q + c \cdot x^r \cdot y^s + \cdots) \cdot \partial x + (a' \cdot x^{m'} \cdot y^{n'} + b' \cdot x^{p'} \cdot y^{q'} + \cdots) \cdot \partial y = 0,$$

*) Die Gleichung (3.) giebt auch noch $x = 0$ und $1-v^2 = 0$. Die Gleichung $x = 0$ steckt in $y = cx$ oder in $ay = x$ (insoferne a statt $\frac{1}{c}$ gesetzt wird) für $a = 0$. Die Gleichung $v^2-1 = 0$ oder $v = \pm 1$ oder $y = \pm x$ endlich steckt ebenfalls in $y = cx$ für $c = \pm 1$. Also geben zufällig die 2 übrigen Faktoren der Gleichung (3.) allemal wiederum besondere Integrale.

so kann man versuchen, sie in eine der eben betrachteten homogenen zu verwandeln, dadurch daß man

2) statt $f_{x,y,v} = 0$ bloß $y = v^k$ oder bloß $x = v^k$

nimmt, und k nachgehends noch dazu bestimmt. Sie wird durch diese erstere Substitution homogen, wenn

$$m+kn = p+kq = r+ks = \cdots = m'+kn'+k-1 = p'+kq'+k-1 = \text{ꝛc. ꝛc.}$$

werden kann. Dies giebt $k = \frac{p-m}{n-q}$, wenn man die erste dieser Gleichungen nimmt. Die übrigen Gleichungen alle müssen aber nun von selbst erfüllt werden, wenn diese Umformung den gewünschten Effekt haben soll. *)

III. Es sey gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung

$$\partial y + by^n \cdot \partial x = ax^m \cdot \partial x.$$

Für $m = 0$ wird sie

$$\partial y + (by^n - a) \cdot \partial x = 0,$$

und es trennen sich die Veränderlichen sogleich, so daß man

$$\int \frac{1}{by^n - a} \cdot dy + x = C$$

erhält.

---

*) Wäre die Gleichung (I.) nur zweigliedrig, nämlich

$$ax^m y^n \cdot \partial x + a' \cdot x^{m'} \cdot y^{n'} \cdot \partial y = 0,$$

so wäre dieses Verfahren überflüssig, weil dann in ihr die Veränderlichen sogleich getrennt werden könnten, so daß man

$$ax^{m-m'} \cdot \partial x + a' y^{n'-n} \cdot \partial y = 0,$$

also $\frac{a}{m-m'+1} \cdot x^{m-m'+1} + \frac{a'}{n'-n+1} \cdot y^{n'-n+1} = C$

zum allgemeinen Integral erhielte.

Ist aber die gegebene Gleichung dreigliedrig, nämlich

$$(ax^m \cdot y^n + b \cdot x^p \cdot y^q) \cdot \partial x + a' x^{m'} \cdot y^{n'} \cdot \partial y = 0,$$

so mag sie in einem spätern Paragraphen (§. 358. IV.) noch einer nähern Betrachtung unterzogen werden.

Ist aber m beliebig, dagegen $n = 1$, so ist sie lineär, und ihr Integral sogleich nach (§. 349.) zu finden.

Ist m beliebig, dagegen $n = 2$, so ist die Gleichung jetzt diese:

$$1) \qquad \partial y + by^2 \cdot \partial x = ax^m \cdot \partial x,$$

und unter dem Namen der Riccati'schen Gleichung viel behandelt worden.

A) Erstens kann man diese Riccati'sche Gleichung (1) homogen zu machen suchen, indem man $y = v^k$ einführt (nach II.). Sie wird dann

$$2) \quad k \cdot v^{k-1} \cdot \partial v + b \cdot v^{2k} \cdot \partial x = ax^m \cdot \partial x,$$

und wird homogen, wenn

$$k - 1 = 2k = m$$

d. h. $k = -1$ genommen wird, und wenn dabei $m = -2$ ist.

B) Zweitens hat man versucht, und

$$\text{statt} \quad f_{x,y,v} = 0 \quad \text{hier} \quad y = A \cdot x^p + x^q \cdot v$$

gesetzt, dabei aber A, p u. q noch unbestimmt gelassen. Nimmt man nachgehends A, p u. q so an, daß die neue Gleichung wiederum bloß 3 gliedrig wird, so findet sich, daß dieser Bedingung durch

$$p = -1, \quad A = \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad q = -2$$

genügt wird, und die neue Gleichung wird nun

$$3) \qquad \partial v + bv^2 \cdot \frac{\partial x}{x^2} = ax^{m+2} \cdot \partial x.$$

Man sieht nun, daß in dieser Gleichung die Veränderlichen getrennt werden können, sie selbst also nach (I.) integrirt werden kann, so oft $m = -4$ ist.

C) Ist aber nicht $m = -4$ (so wenig als $m = -2$), so hat man die Gleichung (3.) weiter umgeformt, indem man einen neuen Veränderlichen y' einführte, dadurch daß

$$\text{statt} \quad f_{x,v,y'} = 0 \quad \text{jetzt bloß} \quad v = \frac{1}{y'}$$

genommen wird. Man erhält dann

$$4) \qquad \partial y' + a y'^2 \cdot x^{m+2} \cdot \partial x = b \cdot \frac{\partial x}{x^2}.$$

Führt man hier wieder einen neuen Veränderlichen x' dadurch ein, daß man

$$x^{m+2} \cdot \partial x = \frac{\partial x'}{m+3} \qquad \text{oder} \qquad x^{m+3} = x'$$

nimmt, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m+4}{m+3} = m'$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$5) \qquad \partial y' + b' \cdot y'^2 \cdot \partial x' = a' \cdot x'^{m'} \cdot \partial x',$$

welche genau von derselben Form, wie die gegebene (1.) ist, also für $m' = -2$ nach (A.) homogen gemacht, für $m' = -4$ dagegen nach (B.) in eine andre verwandelt werden kann, in welcher sich die Veränderlichen trennen lassen.

D) Man ist nun, ganz wie in (C.), wieder von der Gleichung (5.) zu einer andern übergegangen von derselben Form

$$6) \qquad \partial y'' + b' \cdot y''^2 \cdot \partial x'' = a' \cdot x''^{m''} \cdot \partial x'',$$

so daß $-\frac{m'+4}{m'+3} = m''$ wurde,

und so kann man diese Gleichung integriren, für $m'' = -2$ und $m'' = -4$.

E) So fortfahrend hat man sich überzeugt, daß man allemal dahin gelangt, die gegebene Riccati'sche Gleichung zu integriren, so oft

$$m = -\frac{4\alpha}{2\alpha - 1} \qquad \text{ist,}$$

unter α entweder Null oder jede positive ganze Zahl verstanden.

F) Man hat aber auch noch in der gegebenen Riccati'schen Gleichung (1.) $y = \frac{1}{y'}$ genommen, und nachgehends noch $x^{m+1} = x'$, und so endlich eine neue Gleichung von derselben Form erhalten, nämlich

$$7) \quad \partial y' + b' \cdot y'^2 \cdot \partial x' = a' \cdot x'^{m'} \cdot \partial x',$$

und indem man nun auf diese Gleichung (7.) nach und nach dieselben Umformungen der (B, C, D) statt finden ließ, hat man sich überzeugt, daß diese Riccati'sche Gleichung (1.) auch ein endliches Integral hat, so oft

$$m = -\frac{4\alpha}{2\alpha+1}$$

ist, wo α jede positive ganze Zahl bedeutet.

G) Also weiß man, daß die Riccati'sche Gleichung ein Integral in endlicher Form hat, so oft

$$m = -\frac{4\alpha}{2\alpha-1}$$

ist, daß aber dasselbe jedesmal erst nach α auf einander folgenden Transformationen, wie die in (B. und C.) gelehrte, gefunden werden kann.

IV. Wie sehr schwer es ist, die Form $f_{x,y,v}$ zu beurtheilen, durch welche der neue Veränderliche eingeführt wird, mag noch aus folgenden Beispielen hervorgehen.

Beispiel 1. Es sey gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung

$$(y-x) \cdot \partial y = \frac{n \cdot \partial x \cdot (1+y^2) \cdot \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Euler setzt hier

$$y = \frac{x-v}{1+xv},$$

und erhält dann

$$-v \cdot \partial x (1+v^2) + v \cdot \partial v \cdot (1+x^2) = n \cdot \partial x \cdot (1+v^2)^{\frac{3}{2}},$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen sogleich getrennt werden können, so daß man hat

$$\frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{v \cdot \partial v}{(1+v^2) \cdot (v + n \cdot \sqrt{1+v^2})}.$$

Also erhält man zuletzt, wenn man links und rechts integrirt,

$$\frac{1}{Tg} x \text{ *)} = \int \frac{v}{(1+v^2) \cdot (v + n \cdot \sqrt{1+v^2})} \cdot dv + C.$$

*) Das Zeichen $\frac{1}{Tg} x$ bedeutet den Bogen z, dessen Tangente der Zahl x gleich ist, so also daß $tg\, z = x$ ist.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung

$$y \cdot \partial x - x \cdot \partial y + a \cdot x^n y \cdot \partial y \cdot (x^n + b)^{\frac{1}{n}} = 0,$$

so setze man

$$\text{statt } f_{x,y,v} = 0 \quad \text{jetzt } \frac{x}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} = v \cdot y,$$

und man hat bald die getrennte Gleichung

$$\frac{\partial v}{v^n \cdot (ab + v)} + y^{n-1} \cdot \partial y = 0,$$

welche integrirt

$$\int \frac{1}{v^n \cdot (ab + v)} \cdot dv + \frac{1}{n} \cdot y^n = C$$

giebt. *)

§. 355.

Die Gleichung $f_{x,y,v} = 0$, durch welche man den neuen Veränderlichen v einführt, kann auch selbst wieder eine Differenzialgleichung seyn d. h. Ableitungen enthalten. Das Verfahren des (§. 353.) erleidet dadurch eine nur sehr unbedeutende und sogleich in die Augen fallende Abänderung. Wir wollen daher sogleich das Nähere wiederum in einigen besondern Fällen betrachten.

I. Ist die gegebene Differenzialgleichung von der 1sten Ordnung, aber nach ∂y_x nicht bequem algebraisch aufzulösen, so daß man ihr die bisher angenommene Form

$$\partial y_x = \varphi = \frac{M}{N} \quad \text{d. h.} \quad M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x = 0$$

nicht bequem geben kann, so ist es oft besser einen neuen Veränderlichen v so einzuführen, daß

$$\text{statt } f = 0 \quad \text{jetzt } \partial y_x = v$$

genommen wird.

---

*) Wir wollen hier ein für allemal bemerken, daß man eine Gleichung als integrirt ansieht, so oft ihre Integration auf die Integration einer entwickelt gegebenen Funktion, wie solche in dem (IV. Th. d. S.) behandelt worden ist, zurückgeführt sich sieht.

A. Enthält die gegebene Differenzialgleichung gar kein y, und kann sie leicht nach x aufgelöst werden, so daß sie die Form

1) $$x = \varphi_v,$$

annimmt, indem

2) $$\partial y_x = v$$

gesetzt wird, so integrirt man dann die (2.) theilweise, um

3) $$y = \int v \cdot dx = v \cdot x - \int x_v \cdot dv + C$$

zu erhalten; und man kann nun aus (1. u. 3.) x eliminiren, d. h. in (3.) statt x seinen Werth φ_v setzen; und man erhält

4) $$y = v \cdot \varphi_v - \int \varphi_v \cdot dv + C.$$

Aus den Gleichungen (1. u. 4.) erhält man zuletzt, durch Elimination von v, die gesuchte Gleichung zwischen y und x.

Beispiel. Ist

1) $$x \cdot \partial x + a \cdot \partial y = b \cdot \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder, indem man $\partial x = 1$ also $\partial y = \partial y_x$ nimmt, so wie $\partial y_x = v$ setzt,

2) $$x + a \cdot v = b \cdot \sqrt{1 + v^2}$$

die gegebene Differenzialgleichung, so erhält man sogleich

3) $$y = -av^2 + bv \cdot \sqrt{1 + v^2} - \int (-av + b \cdot \sqrt{1 + v^2}) \cdot dv + C;$$

so daß, wenn man aus (2. u. 3.) v eliminirt, das allgemeine Integral der (1.) hervorgeht.

B. Enthält die gegebene Differenzialgleichung wiederum gar kein y, kann sie aber auch nicht leicht nach x aufgelöst werden, so kann man doch oft, außer daß man v durch die Gleichung

1) $$\partial y_x = v$$

einführt, wodurch die gegebene Differenzialgleichung die Form

2) $$\psi_{x,v} = 0$$

annimmt, noch einen neuen Veränderlichen durch eine Gleichung,

3) $$f_{x,v,u} = 0$$

so einführen, daß sich aus (2. u. 3.) sowohl x als auch v in u bequem ausdrücken lassen, so daß man erhält

4) $x = x_u$ und 5) $v = v_u$.

Durch Einführung dieses neuen Veränderlichen u sieht man sich aber gezwungen, der Gleichung (A. 3.) diese Form

6) $$y = \int (v_u \cdot \partial x_u) \cdot du + C$$

zu geben. Aus dieser Gleichung (6.) und aus der Gleichung (4.) kann man dann u eliminiren, und so zuletzt die Gleichung in y und x erhalten, welche das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist.

Beispiel. Ist gegeben die Gleichung

1) $$x^3 \cdot \partial x^3 + \partial y^3 = ax \cdot \partial x^2 \cdot \partial y;$$

oder, wenn man $\partial x = 1$, also $\partial y = \partial y_x$ nimmt,

2) $$x^3 + \partial y_x^3 = ax \cdot \partial y_x;$$

oder, wenn man

3) $$\partial y_x = v$$

setzt,

4) $$x^3 + v^3 = ax \cdot v;$$

so führe man den neuen Veränderlichen u durch die Gleichung

5) $$v = x \cdot u$$

ein, und man erhält dann sogleich

6) $x = \frac{au}{1+u^3}$, 7) $v = \frac{au^2}{1+u^3}$,

also 8) $$\partial x_u = a \cdot \frac{1-2u^3}{(1+u^3)^2}.$$

Die obige Gleichung (6.) des Textes wird daher jetzt

9) $$y = a^2 \cdot \int \frac{u^2(1-2u^3)}{(1+u^3)^3} \cdot du + C$$

oder 10) $$y = \tfrac{1}{6}a^2 \cdot \frac{2u^3-1}{(1+u^3)^2} + \tfrac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{1+u^3} + C,$$

und die Gleichungen (9. u. 6.), wenn man u eliminirt, geben nun das verlangte Integral zwischen y und x.

C. Enthält die gegebene Differenzialgleichung der 1sten Ordnung bloß y und ∂y_x, so kann man sogleich $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x setzen, und man hat eine Gleichung zwischen y und ∂x_y, so

daß das Verfahren (A. oder B.) unverändert wiederum eintreten kann.

Läßt sich nämlich diese Gleichung bequem nach y auflösen, so setzt man

1) $$\partial x_y = v,$$

und hat dann

2) $$y = \varphi_{v'}$$

so wie aus (1.):

3) $$x = \int v \cdot dy = vy - \int y \cdot dv.$$

Setzt man nun statt y in (3.) den Werth aus (2.), so erhält man

4) $$x = v \cdot \varphi_v - \int \varphi_v \cdot dv + C.$$

Wird dann aus (2. u. 4.) v eliminirt, so hat man das verlangte allgemeine Integral; ganz so wie in (A.).

Läßt sich aber die gegebene Differenzialgleichung zwischen y und ∂x_y nicht bequem nach y auflösen, so daß sie, wenn man

$$\partial x_y = v$$

setzt, bloß die verwickelte Form

$$\psi_{y,v} = 0$$

annimmt, so führt man einen neuen Veränderlichen u durch eine Gleichung

$$f_{y,v,u} = 0$$

so ein, daß sich aus $\varphi = 0$ und $f = 0$, y und v bequem in u ausdrücken lassen, so daß man erhält

$$y = y_u \quad \text{und} \quad v = v_u.$$

Hernach nimmt man aus $\partial x_y = v$

$$x = \int v \cdot dy = \int (v_u \cdot \partial y_u) \cdot du + C,$$

und eliminirt zuletzt aus dieser Gleichung und aus $y = y_u$ den Veränderlichen u, so hat man das verlangte Integral; ganz genau so wie in (B.).

D. Enthält die gegebene Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwar x und y zugleich, ist sie aber nach x und y homogen; so führe man erstlich einen neuen Variablen u so ein, daß

1) $y = u \cdot x$

wird, während man dann

2) $\partial y_x = v$

setzt, zugleich aber nach (§. 352.) in der gegebenen Differenzialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}$ statt ∂y_x. Man hat dann aus (1.)

3) $\partial y = u \cdot \partial x + x \cdot \partial u,$

so wie aus (2.) noch

4) $\partial y = v \cdot \partial x.$

Eliminirt man nun aus (3. u. 4.) ∂y, so erhält man

5) $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{v - u}$

oder 6) $log\ x = \int \frac{1}{v_u - u} \cdot du + c$

oder 7) $x = C \cdot e^{\int \frac{1}{v_u - u} \cdot du},$

so wie aus (1.)

8) $y = C \cdot u \cdot e^{\int \frac{1}{v_u - u} \cdot du},$

wo alle bloß angezeigten Integrale beliebige besondere sind, und wo jetzt alles noch darauf ankommt, v in u auszudrücken. Weil aber die gegebene Differenzialgleichung zwischen x, y und ∂y_x d. h. zwischen x, y und v, nach x und y homogen ist, so werden aus ihr, sobald ux statt y gesetzt wird, alle x wegfallen, so daß sie bloß in eine Gleichung zwischen u und v übergeht, welche durch

9) $\psi_{u,v} = 0$

bezeichnet seyn mag, und aus welcher nun v in u gefunden, und dieser Ausdruck v_u in (8.) substituirt werden kann. Wird zuletzt aus (1. u. 8.) u eliminirt, so hat man das verlangte Integral zwischen y und x. *)

---

*) Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß wenn die Gleichung auch nicht homogen ist, wenn sie nur in eine andre von der Form (9.) übergeht, dieselbe Methode doch anwendbar bleibt.

Läßt sich aber die Gleichung (9.) leichter nach u als nach v auflösen; so daß sich leichter $u = u_v$ daraus ableiten läßt, als $v = v_u$, so muß man lieber die Gleichung (5.) zur Rechten theilweise integriren, indem man hat

$$\int \frac{1}{v_u - u} \cdot du = \int \frac{\partial u_v}{v - u_v} \cdot dv = \int - \frac{\partial (v - u_v)_v}{v - u_v} \cdot dv + \int \frac{1}{v - u_v} \cdot dv,$$

also statt der (6.) jetzt lieber

$$10) \quad log\, x = - log\, (v - u_v) + \int \frac{1}{v - u_v} \cdot dv + C$$

oder $$11) \quad x \cdot (v - u_v) = c \cdot e^{\int \frac{1}{v - u_v} \cdot dv};$$

so daß man aus der (9.) jetzt u in v ausgedrückt findet, und diesen Ausdruck statt u_v in (11.) substituirt. Nach der zur Rechten vollendeten Integration aber muß aus dieser (11.) und der (9.) und der (1.) sowohl u als auch v eliminirt werden, um das Integral zwischen y und x zu haben.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung

$$1) \quad y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = nx \cdot \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

oder

$$2) \quad y - x \cdot \partial y_x = nx \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2};$$

so erhält man, wenn $y = x \cdot u$ und $\partial y_x = v$ gesetzt wird,

$$3) \quad u - v = n \cdot \sqrt{1 + v^2} \quad \text{statt} \quad \psi_{u,v} = 0,$$

woraus denn

$$4) \quad u_v = v + n\sqrt{1 + v^2} \quad \text{hervorgeht.}$$

Die Gleichung (10.) oder (11.) des Textes giebt daher jetzt, weil

$$\int \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + v^2}} \cdot dv = \frac{1}{n} \cdot log\, (v + \sqrt{1 + v^2}) \quad \text{ist,}$$

$$5) \quad x = \frac{c}{\sqrt{1 + v^2}} \cdot (v + \sqrt{1 + v^2})^{-\frac{1}{n}}$$

und $$6) \quad y = \frac{c(v + n\sqrt{1 + v^2})}{\sqrt{1 + v^2}} \cdot (v + \sqrt{1 + v^2})^{-\frac{1}{n}},$$

aus welchen beiden Gleichungen v nur noch eliminirt werden darf, um die Gleichung zwischen y und x zu haben.

Aus (5. und 6.) erhält man auch noch

$$7) \qquad \frac{y}{x} = v + n \cdot \sqrt{1+v^2},$$

so daß auch (5. und 7.) die gesuchte Gleichung liefern.

Für $n = 1$, wird die gesuchte Gleichung

$$x \cdot (x^2+y^2) - 2c \cdot x^2 = 0$$

d. h. entweder $x = 0$ oder $x^2+y^2-2cx = 0$.

Die letztere Gleichung ist das gesuchte allgemeine Integral; und setzt man in ihm $\frac{1}{a}$ statt c, um das allgemeine Integral in der Form $a \cdot (x^2+y^2) - 2x = 0$ zu erhalten, so geht $x = 0$ als ein besonderes Integral hervor.

Beispiel 2. Die Gleichung der ersten Ordnung

$$x \cdot \partial y^3 + y \cdot \partial x^3 = \partial y \cdot \partial x \cdot \sqrt{xy \cdot (\partial x^2+\partial y^2)}$$

giebt, auf demselben Wege behandelt,

zunächst $$v^3 + u = v \cdot \sqrt{u \cdot (1+v^2)},$$

also $$u = \tfrac{1}{2}v^2 - v^3 + \tfrac{1}{2}v^4 + \tfrac{1}{2}v^2 \cdot \sqrt{(1+v^2) \cdot (1-4v+v^2)},$$

und führt zuletzt zu den beiden Gleichungen

$$log\, x = -log\left(v - \frac{y}{x}\right) + \tfrac{1}{2}\int \frac{2-v}{v \cdot (1-v+v^2)} \cdot dv +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-4v+v^2}}{(1-v+v^2) \cdot \sqrt{1+v^2}} \cdot dv$$

und $$v^3 + \frac{y}{x} = v \cdot \sqrt{\frac{y}{x}(1+v^2)},$$

zwischen denen noch v eliminirt werden muß, um das Integral zwischen x und y zu haben.

E. Enthält die gegebene Differenzialgleichung der 1sten Ordnung wiederum y und x zugleich, aber y nur in der ersten Dimension, so daß sie, wenn

$$1) \qquad \partial y_x = v \quad \text{oder} \quad \partial y = v \cdot \partial x$$

gesetzt wird, die Form

$$2) \qquad y = Y_{x,v}$$

annimmt, wo $Y_{x,v}$ einen Ausdruck bedeutet, welcher nicht y sondern bloß u und v enthält, dagegen dem y gleich ist; so folgt aus (2.)

$$\partial y = \partial Y_x \cdot \partial x + \partial Y_v \cdot \partial v$$

oder 3) $$\partial y = R_{x,v} \cdot \partial x + S_{x,v} \cdot \partial v,$$

wenn ∂Y_x und ∂Y_v beziehlich durch R und S vorgestellt werden, und wenn die bloßen ∂ Ableitungen nach einem beliebigen neuen Veränderlichen bedeuten, von welchem x, also dann auch y und v als Funktionen angesehen sind. Eliminirt man nun aus (1. und 3.) den Ausdruck ∂y, so erhält man

4) $$(R - v) \cdot \partial x + S \cdot \partial v = 0,$$

welches eine Gleichung zwischen x, v, ∂x, ∂v (der 1sten Ordnung) ist. Kann nun diese Gleichung (4.) integrirt werden, so daß man

5) $$\psi_{x,v,c} = 0$$

erhält, so giebt die Elimination von v aus (5. und 2.) das allgemeine Integral zwischen x und y.

Hievon mögen noch insbesondere nachstehende einzelne Fälle betrachtet werden.

Erster Fall. Ist die gegebene Differenzialgleichung, wenn v statt ∂y_x gesetzt wird, diese

6) $$y = v \cdot x + V,$$

wo V bloß v aber kein x enthält, so wird die obige Gleichung (4.) jetzt

7) $$(x + \partial V_v) \cdot \partial v = 0$$

d. h. entweder

8) $x + \partial V_v = 0$ oder 9) $\partial v = 0.$

Die (8.) giebt offenbar allemal einen singulären Werth; die (9.) dagegen, integrirt, giebt

10) $$v = c,$$

so daß man $y = vx + V$ und $v = c$

oder 11) $$y = cx + [V_v]_c$$

als das allgemeine Integral der gegebenen Diff. Glgn. erhält. (Vgl. V. Th. d. S. §. 204.).

Zweiter Fall. Ist die gegebene Differenzialgleichung, wenn v statt ∂y_x gesetzt wird, diese

12) $$y = V \cdot x + V',$$

wo V und V′ bloß v aber kein x enthalten, so wird die Gleichung (4.) jetzt in folgende

13) $$(V - v) \cdot \partial x_v + x \cdot \partial V_v + \partial V'_v = 0$$

übergehen, und kann integrirt werden, weil sie von der ersten Ordnung und lineär ist, und deßhalb

$$e^{\int \frac{1}{V_v - v} \cdot dv}$$

zum integrirenden Faktor hat. (Vgl. §. 349.).

Beispiel 1. Die Differenzialgleichung der ersten Ordnung

1) $$y \cdot \partial x - x \cdot \partial y = n \cdot \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

hat man sogleich auf die Form

2) $$y = v \cdot x + n \cdot \sqrt{1 + v^2}$$

gebracht, sobald

3) $$\partial y_x = v$$

gesetzt wird. Also ist

4) $$y = c \cdot x + n \cdot \sqrt{1 + c^2}$$

ihr allgemeines Integral.

Dieselbe Differenzialgleichung hat auch einen singulären Werth, nämlich

5) $$y^2 + x^2 = n^2.$$

Beispiel 2. Die Differenzialgleichung der ersten Ordnung

1) $$y \cdot \partial x - mx \cdot \partial y = n \cdot \sqrt[3]{\partial x^3 + \partial y^3}$$

hat man sogleich auf die Form

2) $$y = mv \cdot x + n \cdot \sqrt[3]{1 + v^3}$$

gebracht, wenn

3) $$\partial y_x = v$$ gesetzt wird.

Die Gleichung (4.) oder vielmehr die Gleichung (13.) des Textes wird daher jetzt

4) $$(mv - v) \cdot \partial x_v + mx + nv^2 \cdot (1 + v^3)^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Multiplizirt man nun diese Gleichung mit dem integrirenden Faktor $v^{\frac{1}{m-1}}$, und integrirt man, so ergiebt sich

$$5)\quad v^{\frac{m}{m-1}} \cdot x = -\frac{n}{m-1}\int v^{\frac{2m-1}{m-1}} \cdot (1+v^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot dv + C.$$

Wird dann aus (2. und 5.) v eliminirt, so erhält man das Integral zwischen y und x.

II. Ist die gegebene Differenzialgleichung von der 2ten Ordnung, aber bloß eine Gleichung zwischen den beiden Ableitungen $\partial^2 y_x$ und ∂y_x, ohne y und x selber zu enthalten, so setze man

$$1)\quad \partial y_x = v,$$

so wird $$2)\quad \partial^2 y_x = \partial v_x,$$

und die gegebene Differenzialgleichung wird, wenn man sie nach $\partial^2 y_x$ d. h. nach ∂v_x auflößt, die Form annehmen

$$3)\quad \partial v_x = V_v,$$

also von der ersten Ordnung und so seyn, daß in ihr die Veränderlichen leicht getrennt werden können, wenn man $\frac{1}{\partial x_v}$ statt ∂v_x schreibt; so daß man

$$4)\quad \frac{1}{V} = \partial x_v,$$

also $$5)\quad x = \int \frac{1}{V} \cdot dv + C$$

und $$6)\quad y = \int v \cdot dx = \int v \cdot \partial x_v \cdot dv = \int \frac{v}{V} \cdot dv + C_1$$

erhält. Wird zuletzt aus den beiden Gleichungen (5. und 6.) v eliminirt, so erhält man y in x mit den beiden willkührlichen Konstanten C und C_1.

Beispiel. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y^x} = a, \text{ *)}$$

---

*) Zu dieser Gleichung führt die Aufgabe: „Es wird eine Kurve

so hat man, wenn $\partial y_x = v$ gesetzt wird,

$$\partial v_x = \frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{a}, \text{ also } \partial x_v = \frac{a}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

demnach

$$x = \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} + C; \quad y = -\frac{a}{\sqrt{1+v^2}} + C_1;$$

und, wenn man aus diesen letztern beiden Gleichungen v eliminirt:

$$(x-C)^2 + (y-C_1)^2 = a^2.$$

III. Ist die gegebene Differenzialgleichung von der nten Ordnung, aber bloß eine Gleichung zwischen den beiden Ableitungen $\partial^n y_x$ und $\partial^{n-1} y_x$, so daß sie, wenn

1) $\partial^{n-1} y_x = v$, also $\partial^n y_x = \partial v_x$

gesetzt wird, nach $\partial^n y_x$ aufgelößt, die Form

2) $\partial v_x = V_v$ oder $\partial x_v = \frac{1}{V}$

annimmt, so erhält man sogleich

3) $x = \int \frac{1}{V} \cdot dv + C,$

welche Gleichung das allgemeine erste Integral der gegebenen Differenzialgleichung, und, in so ferne $\partial^{n-1} y_x$ statt v gesetzt werden muß, wiederum eine Differenzialgleichung der n—1ten Ordnung ist.

Weil aber diese Gleichung (3.), wenn man sie nach v oder $\partial^{n-1} y_x$ algebraisch auflößt, allemal zu einer Gleichung führt von der Form

4) $\partial^{n-1} y_x = X_x,$

so wird das allgemeine Ur-Integral hiervon und von der gegebenen Differenzialgleichung (1.) nach (§. 229. d. V. Th. d. S.) ohne weiteres gefunden.

$y = y_x$ so gesucht, daß der Krümmungshalbmesser an jedem ihrer Punkte eine und dieselbe Länge a behalte“ Auch findet man in der That, nach beendigter Integration, die Gleichung einer Kreislinie, deren Mittelpunkt beliebig wo ist.

Man kann aber auch, in so ferne die Gleichung (3.) nicht leicht nach v aufzulösen seyn sollte, dieselbe weiter so behandeln: Nämlich aus der (1.) findet sich noch

5) $$\partial^{n-2}y_x = \int v \cdot dx = \int (v \cdot \partial x_v) \cdot \partial v = \int \frac{v}{V} \cdot dv + C_1.$$

Daraus zieht man aber weiter, wenn

6) $$\int \frac{v}{V} \cdot dv + C_1$$ durch V'

bezeichnet wird,

7) $$\partial^{n-3}y_x = \int V' \cdot dx = \int (V' \cdot \partial x_v) \cdot dv = \int \frac{V'}{V} \cdot dv + C_2.$$

Wird dieses Resultat zur Rechten durch V'' ausgedrückt, so erhält man weiter

8) $$\partial^{n-4}y_x = \int V'' \cdot dx = \int (V'' \cdot \partial x_v) \cdot dv = \int \frac{V''}{V} \cdot dv + C_3$$

u. s. w. f. bis man endlich y selbst in v ausgedrückt hat. Wird endlich aus dieser letztern Gleichung und der Gleichung (3), der Buchstabe v eliminirt, so erhält man zuletzt auch y in x.

Beispiel. Für $n = 3$ findet sich

1) $$x = \int \frac{1}{v} \cdot dx + C,$$ wo $v = \partial^2 y_x$ ist;

aber aus $\partial^2 y_x = v$ folgt weiter

2) $$\partial y_x = \int v \cdot \partial x = \int (v \cdot \partial x_v) \cdot dv = \int \frac{v}{V} \cdot dv + C_1;$$

und daraus, weil $$y = \int \partial y_x \cdot dx = \int (\partial y_x \cdot \partial x_v) \cdot dv = \int \left(\frac{1}{V} \cdot \partial y_x\right) \cdot dv$$

ist, 3) $$y = \int \frac{1}{V} \cdot \left(\int \frac{v}{V} \cdot dv + C_1 \right) \cdot dv + C_2.$$

Wird nun aus (1. und 3.) v eliminirt, so ergiebt sich y in x mit 3 willkührlichen Konstanten C, C_1 und C_2.

IV. Ist die gegebene Differenzialgleichung bloß eine Gleichung zwischen $\partial^n y_x$ und $\partial^{n-2} y_x$, so setzt man

1) $$\partial^{n-2}y_x = v, \quad \text{also} \quad \partial^n y_x = \partial^2 v_x;$$

und man kann dann die gegebene Differenzialgleichung, in so ferne sie nach $\partial^n y_x$ algebraisch aufgelößt wird, auf die Form bringen

2) $$\partial^2 v_x = V_v,$$

wo V eine bloße Funktion von v ist.

Behandelt man diese Gleichung nach (§. 348.) mittelst des integrirenden Faktors ∂v_x, so erhält man

3) $$\tfrac{1}{2}\partial v_x^2 = \int V \cdot dv + C$$

oder 4) $$\partial v_x = \sqrt{2(\int V \cdot dv + C)} = \sqrt{2\int V \cdot dv + c},$$

oder nach (§. 351.)

5) $$\partial x_v = \frac{1}{\sqrt{2\int V \cdot dv + c}}.$$

Wenn man nun nochmals integrirt, so erhält man

6) $$x = \int \frac{1}{\sqrt{2\int V \cdot dv + c}} \cdot dv + c_1.$$

Eliminirt man nun aus (I. u. 6.) den Buchstaben v, so erhält man eine Gleichung zwischen x und $\partial^{n-2} y_x$, welche als das 2te allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung der nten Ordnung angesehen werden muß.

Auf diese neue Differenzialgleichung der n—2ten Ordnung kann man nun aber wieder die kurz vorher in (III.) beschriebenen Methoden anwenden, um zuletzt die Ur-Gleichung zwischen y und x zu erhalten.

Für $n = 4$ hätte man z. B.

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{2\int V \cdot dv + c}} \cdot dv + c_1$$

aber dann

$$y = \int \left(\int \frac{v}{\sqrt{2\int V \cdot dv + c}} \cdot dv + c_2 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\int V \cdot dv + c}} \cdot dv + c_3,$$

aus welchen beiden Gleichungen v eliminirt werden muß, um das Ur-Integral zwischen x, y und den 4 willkührlichen Konstanten zu haben.

V. Ueberhaupt fällt in die Augen, daß wenn eine gegebene Differenzialgleichung der nten Ordnung (welche also die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... bis zu $\partial^n y_x$ hin in sich aufgenommen hat), zufällig y selbst nicht mehr enthält, — solche dann dadurch, daß man

1) $$\partial y_x = v,$$

mithin $\partial^2 y_x = \partial v_x$, $\partial^3 y_x = \partial^2 v_x$, ... $\partial^n y_x = \partial^{n-1} v_x$

setzt, allemal von einer um 1 niedrigern Ordnung wird.

Kann man dann aus der neuen Differenzialgleichung v in x oder x in v ausgedrückt finden, so hat man noch aus (1.)

2) $y = \int v \cdot dx + C$, oder 3) $y = v \cdot x - \int x \cdot dv + C$.

Beispiel 1. Ist gegeben die Gleichung

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = ax^2, \text{ *)}$$

so wird sie augenblicklich für $\partial y_x = v$ in diese andre

$$\frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial v_x} = ax^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial v_x}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{ax^2}$$

übergehen, welche von der 1sten Ordnung ist, und in welcher die Veränderlichen bereits getrennt sind. Integrirt man, so findet sich

$$\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{1}{ax^2} \cdot dx = C - \frac{1}{ax}.$$

Daraus folgt dann

$$y = \int v \cdot dx = v \cdot x - \int x \cdot dv = v \cdot x - \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{1+v^2}}{C \cdot \sqrt{1+v^2} - v} \cdot dv + C_1.$$

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$(a^2 \cdot \partial y_x^2 + x^2) \cdot \partial^2 y_x = nx \cdot \partial y_x,$$

so erhält man, wenn $\partial y_x = v$ gesetzt wird,

$$(a^2 \cdot v^2 + x^2) \cdot \partial v_x = n \cdot v \cdot x.$$

Da diese letztere Gleichung von der 1sten Ordnung und homogen ist, so kann man nach (§. 354. 1.) sie integriren, indem man $x = v \cdot u$ setzt. Man erhält dann

$$v = c \cdot \left(a^2 + (1-n)u^2\right)^{\frac{n}{2(1-n)}};$$

---

*) Dies ist der Fall, wenn die Kurve $y = y_x$ gesucht wird, deren Krümmungshalbmesser zu dem Quadrat ihrer Abscisse, für jeden ihrer Puncte, ein und dasselbe Verhältniß, nämlich 1 : a, behält.

$$x = cu \cdot \left(a^2 + (1-n)u^2\right)^{\frac{n}{2(1-n)}};$$

$$y = c^2 u \cdot \left(a^2 + (1-n)u^2\right)^{\frac{n}{1-n}} - nc^2 \cdot \int u^2 \cdot \left(a^2 + (1-n)u^2\right)^{\frac{2n-1}{1-n}} \cdot du + c_1.$$

VI. Enthält die Differenzialgleichung der nten Ordnung außer den Ableitungen bis zu $\partial^n y_x$ hin nicht mehr x, dagegen y selbst noch, so kann man wiederum wie im (§. 351.).

$$\frac{1}{\partial x_y} \quad \text{statt} \quad \partial y_x$$

$$-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3} \quad \text{statt} \quad \partial^2 y_x$$

u. s. w. f. setzen, und man wird dann sogleich wieder den vorigen Fall haben.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\partial^2 y_x = Y_y,$$

so erhält man daraus

$$\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3} = -Y_y;$$

oder, wenn $\partial x_y = v$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial v_y}{v^3} = -Y_y;$$

demnach, wenn man hier links und rechts die Integrale nimmt,

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{v^2} = \int Y \cdot dy + C$$

oder

$$\partial y_x^2 = 2(\int Y \cdot dy + C) = 2\int Y \cdot dy + c,$$

woraus ∂x_y und dann x in y folgert. *)

Ist die gegebene Differenzialgleichung jedoch nur von der 2ten Ordnung, so kann man unmittelbar in sie, und ohne daß

---

*) Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man die Gleichung

$$\partial^2 y_x = Y_y$$

mit dem integrirenden Faktor ∂y_x multiplizirt, und dann links und rechts die Integrale nimmt.

man erst statt der Ableitungen von y nach x, die andern von x nach y einführt, wie in (V.)

$$\partial y_x = v$$

setzen, wenn man dann nur bemerkt, daß

$$2) \quad \partial^2 y_x = \partial v_x = \frac{\partial v_y}{\partial x_y} = v \cdot \partial v_y$$

ist, und diese Werthe statt ∂y_x und $\partial^2 y_x$ substituirt.

Beispiel. Ist gegeben die Gleichung

$$ab \cdot \partial^2 y_x = \sqrt{y^2 + a^2 \cdot \partial y_x^2},$$

und setzt man hier

$$\partial y_x = v, \quad \partial^2 y_x = v \cdot \partial v_y;$$

so erhält man

$$ab \cdot v \cdot \partial v_y = \sqrt{y^2 + a^2 \cdot v^2},$$

welche Gleichung von der ersten Ordnung und homogen ist, also integrirt werden kann, indem man etwa $y = v \cdot u$ setzt, wodurch

$$v = \frac{y}{u}, \quad \partial v_y = \frac{u - y \cdot \partial u_y}{u^2} \quad \text{wird.}$$

Die gegebene Differenzialgleichung geht nun über in

$$u^2 \cdot \sqrt{a^2 + u^2} = ab \cdot u - ab \cdot y \cdot \partial u_y,$$

d. h. in

$$\frac{1}{y} = \frac{ab \cdot \partial u_y}{ab \cdot u - u^2 \cdot \sqrt{a^2 + u^2}},$$

in welcher letzteren die Veränderlichen getrennt sind, so daß man jetzt nur noch links und rechts die Integrale nehmen darf.

Um $\int \frac{1}{ab \cdot u - u^2 \cdot \sqrt{a^2 + u^2}} \cdot du$ zu finden, mache man dies irrazionale Differenzial dadurch razional, daß man

$$\sqrt{a^2 + u^2} = s \cdot u$$

nimmt, so daß $u = \frac{a}{\sqrt{s^2 - 1}}$ wird; und man erhält dann, wenn $\frac{a}{b} = 2n$ gesetzt wird, und wenn man diese Werthe sogleich in die obige Gleichung zwischen y und u substituirt,

$$\frac{1}{y} = -\frac{s}{s^2 - 2ns - 1} \cdot \partial s_y.$$

Zerlegt man hier den Bruch zur Rechten in seine Parzialbrüche, und nimmt man dann links und rechts die Integrale nach allem y, so erhält man

$$y^{2\sqrt{nn+1}} = C.\frac{(s-n+\sqrt{nn+1})^{n-\sqrt{nn+1}}}{(s-n-\sqrt{nn+1})^{n+\sqrt{nn+1}}}.$$

Endlich zieht man aus

$$y = v.u = u.\partial y_{x'}$$

sogleich $$\partial x_y = \frac{u}{y},$$

und daraus $$\partial x_s = \frac{\partial x_y}{\partial s_y} = \frac{-as}{(s^2-2ns-1).\sqrt{s^2-1}},$$

woraus vollends x in s gefunden wird.

§. 356.

Man kann auch einen neuen Veränderlichen v in der Absicht einführen, um aus der gegebenen Differenzialgleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y nach x eine neue Gleichung zwischen allen 3 Veränderlichen x, y und v herzuholen, welche aber eines Integrals fähig ist.

Es sey z B. gegeben die Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$\sqrt{1+\partial y_x^2} - \partial\left(\frac{y.\partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right) = 0$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach allem x vorstellen. Diese Gleichung reduzirt sich auf

2) $$1+\partial y_x^2 - y.\partial^2 y_x = 0;$$

aber man sieht es ihrer ersten Form an, daß es bequem seyn dürfte, den neuen Veränderlichen so einzuführen, daß

3) $$\sqrt{1+\partial y_x^2} = \partial v_x \quad \text{oder} \quad 1+\partial y_x^2 = \partial v_x^2$$

wird, weil dann die gegebene Differenzialgleichung selbst in

4) $$\partial v - \partial\left(\frac{y.\partial y_x}{\partial v_x}\right) = 0$$

sich umwandelt, und nun integrirt werden kann, so daß man

5) $$v - \frac{y.\partial y_x}{\partial v_x} = c \quad \text{oder} \quad v.\partial v_x - y.\partial y_x = c.\partial v_x$$

erhält. Ja man kann auch sagen, daß die Gleichung (4. oder 5.) zur Bestimmung von v eingeführt sey, und daß die Gleichung (3.) statt der gegebenen Differenzialgleichung stehe. Man könnte deshalb in (5.) der Konstante c einen ganz beliebigen Werth geben, weil die Einführung des neuen Veränderlichen v durch eine beliebige Gleichung statt finden kann. Allein auch wenn man c allgemein läßt, so kann man doch die Gleichung (5.) sogleich noch einmal integriren, und man erhält

$$v^2 - y^2 = 2cv + c_1.$$

Findet man nun hieraus v und ∂v_x, und setzt diesen Werth in (3.), so erhält man eine Gleichung der 1sten Ordnung, welche als ein allgemeines erstes Integral der gegebenen Gleichung angesehen werden muß. Weil aber solches nur eine einzige willkührliche Konstante zu enthalten braucht, so setze man lieber $c = 0$, so daß bloß

$$v^2 - y^2 = c_1, \quad \text{also} \quad v = \sqrt{c_1 + y^2}, \quad \partial v_x = \frac{+y}{\sqrt{c_1 + y^2}}$$

wird; und die Gleichung (3.) wird dann

$$1 + \partial y_x{}^2 = \frac{y^2}{c_1 + y^2}.$$

oder $\partial y_x = \frac{\sqrt{-c_1}}{\sqrt{c_1 + y_x^2}}$ oder $\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{y^2 - c_1}$,

wenn man $-c$ statt c_1 schreibt; demnach ist

$$x = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \sqrt{y^2 - c} \cdot dy + c_1,$$

(wo c_1 die zweite willkührliche Konstante vorstellt) das gesuchte allgemeine Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1.

Anmerkung. Später (in dem XVIII. Kap.) werden wir über die hier gebrauchte Integration der Funktionen von 3 und mehr Veränderlichen das Weitere und Ausführliche mittheilen. Jene Lehren müssen dann bei der Anwendung dieser hier beschriebenen Methode jedesmal noch zu Hülfe genommen werden.

§. 357.

Haben wir bisher, um eine Differenzialgleichung der nten Ordnung zwischen x, y und den Ableitungen von y nach x, in eine andere umformen zu können, welche leichter integrirt werden kann, einen neuen Veränderlichen v eingeführt, so kann man nun

auch weiter gehen, und sogleich zwei neue veränderliche v und u einführen, durch zwei Gleichungen zwischen x, y, v und u, welche hier durch

1) $f_{x,y,v,u} = 0$ und 2) $\varphi_{x,y,v,u} = 0$

vorgestellt seyn mögen.

Hat man nun die gegebene Differenzialgleichung zwischen x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc. $\partial^n y_x$ nach (§. 352.) zuvor so umgewandelt, daß sie x, y und lauter Ableitungen von x und y nach irgend einem unbestimmt gelassenen neuen Veränderlichen enthält; und nimmt man von den Gleichungen (1. u. 2.) die Ableitungen nach demselben neuen Veränderlichen: so erhält man

3) $\partial f = 0$, d. h. $\partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_v \cdot \partial v + \partial f_u \cdot \partial u = 0$;

4) $\partial \varphi = 0$, d. h. $\partial \varphi_x \cdot \partial x + \partial \varphi_y \cdot \partial y + \partial \varphi_v \cdot \partial v + \partial \varphi_u \cdot \partial u = 0$;

so wie noch

$\partial^2 f = 0$; $\partial^3 f = 0$; ... $\partial^n f = 0$; $\partial^2 \varphi = 0$; $\partial^3 \varphi = 0$; ... $\partial^n \varphi = 0$;

so daß man zusammen $2n+3$ Gleichungen hat, aus denen 2 der 4 Veränderlichen, nebst den $2n$ Ableitungen derselben eliminirt werden können, also daß zuletzt die umgeformte Differenzialgleichung zwischen u, v und deren Ableitungen hervorgeht, für welche alles gilt, was (§. 353.) bereits für die dortige Endgleichung gesagt sich findet.

Z. B. der Gleichung der 1sten Ordnung

1) $(a+mx+ny) \cdot \partial x + (b+px+qy) \cdot \partial y = 0$

sieht man es an, daß sie leicht homogen gemacht werden kann, wenn man zwei neue Veränderliche v und u einführt, mittelst der beiden Gleichungen

2) $v + \alpha = x$ und 3) $u + \beta = y$,

welche 4) $\partial v = \partial x$ und 5) $\partial u = \partial y$

geben, also daß die gegebene Differenzialgleichung in diese

6) $(mv+nu) \cdot \partial v + (pv+qu) \cdot du = 0$

übergeht, sobald α und β so genommen sind, daß

7) $a+m\alpha+n\beta=0$ und 8) $b+p\alpha+q\beta=0$

wird.

Die Gleichung (6.), da sie homogen ist, kann dann aber nach (§. 354. I.) sogleich integrirt werden. *)

Anmerkung. Man übersieht leicht, wie auch sogar mehr als zwei neue Veränderliche eingeführt werden können, durch eben so viele Gleichungen, als man neue Veränderliche einführen will; und daß das Verfahren, welche in jedem Falle zu beobachten ist, um zuletzt eine Gleichung wieder zwischen nur zwei Veränderlichen zu erhalten, dem vorhergehenden zu Folge in jedem einzelnen Falle leicht bestimmt werden kann.

§. 358.

Die Form der Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$, durch welche die neuen Veränderlichen eingeführt werden, ist schwer zu errathen, und kann man nur in jedem besonderen Falle durch besondere Betrachtungen dazu geführt werden. — Auch können diese Gleichungen selber wieder Differenzialgleichungen seyn, und wird dann das weitere Verfahren danach unbedeutend abgeändert. Auch

---

*) Sollte $mq-np=0$ seyn, so daß die Gleichungen (7. und 8.) einen Wiederspruch enthielten, daher α und β nicht bestimmten, so müßte man diesen Fall besonders behandeln. Setzt man aber $q=\frac{np}{m}$ in die (1.), so erhält man die Gleichung

$$9)\quad a\cdot\partial x+b\cdot\partial y+(mx+ny)\cdot\left(\partial x+\frac{p}{m}\cdot\partial y\right)=0,$$

welche dasmal zu integriren ist. Man wird

$$10)\qquad m\cdot x+n\cdot y=v,$$

also

$$11)\qquad m\cdot\partial x+n\cdot\partial y=\partial v$$

setzen, um durch Elimination von y und ∂y aus (9.—11.) die Gleichung

$$12)\qquad \partial x+\frac{(bm+pv)\cdot\partial v}{amn-bm^2+(mn-pm)\cdot v}=0$$

zu erhalten, in welcher die Veränderlichen getrennt sind, welche also integrirt werden kann.

hier können wir wieder, statt allgemeine Regeln zu geben, den Geist des Verfahrens nur in einzelnen Fällen durchblicken lassen.

I. Ist z. B. gegeben die Gleichung der ersten Ordnung

$$ay \cdot \partial x + bx \cdot \partial y + x^m y^n \cdot (py \cdot \partial x + qx \cdot \partial y) = 0,$$

so erhält man zunächst, wenn man sie durch $x \cdot y$ dividirt,

$$a \cdot \frac{\partial x}{x} + b \cdot \frac{\partial y}{y} + x^m \cdot y^n \cdot \left(p \cdot \frac{\partial x}{x} + q \cdot \frac{\partial y}{y} \right) = 0.$$

Da nun, wenn $a \cdot \frac{\partial x}{x} + b \cdot \frac{\partial y}{y}$ integrirt wird, $a \cdot log\, x + b \cdot log\, y$ d. h. $log(x^a \cdot y^b)$; da ferner, wenn $p \cdot \frac{\partial x}{x} + q \cdot \frac{\partial y}{y}$ integrirt wird, $log(x^p \cdot y^q)$ hervorgeht: so wird man durch diese Betrachtung veranlaßt, etwa

$$x^a \cdot y^b = v \qquad \text{und} \qquad x^p \cdot y^q = u$$

zu setzen, wodurch die gegebene Differenzialgleichung in

$$\frac{\partial v}{v} + v^{\frac{qm-pn}{aq-bp}} \cdot u^{\frac{an-bm}{aq-bp}} \cdot \frac{\partial u}{u} = 0 \qquad \text{übergeht,}$$

in welcher die Veränderlichen sogleich getrennt werden können, so daß man erhält

$$v^{\frac{pn-qm}{aq-bp}-1} \cdot \partial v + u^{\frac{an-bm}{aq-bp}-1} \cdot \partial u = 0$$

d. h. $$\frac{1}{pn-qm} \cdot v^{\frac{pn-qm}{aq-bp}} + \frac{1}{an-bm} \cdot u^{\frac{an-bm}{aq-bp}} = C,$$

welches das gesuchte allgemeine Integral ist, sobald man nur v und u wiederum eliminirt, um die Gleichung zwischen x und y zu haben.

II. Im (§. 355. I. E.) haben wir gesehen, wie die dortige Differenzialgleichung von der Form $y = f_{x,v}$ integrirt werden kann (wo v die Ableitung ∂y_x vorstellt), so oft die Gleichung

$$(R_{x,v} - v) \cdot \partial x + S_{x,v} \cdot \partial v = 0,$$

in welcher $R = \partial f_x$ und $S = \partial f_v$ ist, integrirt werden kann. Man kann daher versuchen, diese letztere nach dem ge-

genwärtigen Paragraphen durch Einführung zweier neuen Veränderlichen u und z homogen zu machen.

Setzt man zu dem Ende

$$x = u^m \quad \text{und} \quad v = z^n,$$

so wird daraus

$$(m \cdot R_{u,z} - z^n) \cdot u^{m-1} \cdot \partial u + n \cdot S_{u,z} \cdot z^{n-1} \cdot \partial z = 0,$$

und diese Gleichung kann daher nicht homogen werden, wenn nicht R und S durch dieselben Substitutionen selbst schon homogen, und dabei R vom Grade n, S dagegen vom Grade m, geworden sind.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$B \cdot \partial y_x^k = A \cdot x^\alpha + y\beta \quad \text{oder} \quad y = (B \cdot v^k - A \cdot x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}},$$

so hat man dasmal

$$f_{x,v} = (B \cdot v^k - A \cdot x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}},$$

also
$$\partial f_x = R = \frac{-\alpha A}{\beta} \cdot (B \cdot v^k - A \cdot x^\alpha)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1}$$

und
$$\partial f_v = S = \frac{Bk}{\beta} \cdot (B \cdot v^k - A \cdot x^\alpha)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \cdot v^{k-1}.$$

Setzt man nun hier u^m statt x und z^n statt v, und will man m und n so nehmen, daß R vom Grade n, dagegen S vom Grade m wird; so hat man

$$km = \alpha n, \quad \frac{\alpha m(1-\beta)}{\beta} + m(\alpha - 1) = n \quad \text{und} \quad \frac{\alpha m(1-\beta)}{\beta} + n(k-1) = m$$

zu nehmen, welches zu der Bedingungsgleichung

$$k = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}$$

führt. Ist diese Gleichung von den gegebenen Exponenten k, α und β erfüllt, so kann man $n = \alpha$, $m = k$ nehmen, und die Gleichung

$$(R - v) \cdot \partial x + S \cdot \partial v = 0$$

wird durch die Einführung dieser neuen Veränderlichen mittelst der Gleichungen

$$x = u^k \quad \text{und} \quad v = z^\alpha$$

homogen werden, so daß man nach (§. 354. I.) ihr Integral finden kann. *)

III. Wie bei der Einführung der neuen Veränderlichen alles auf eine glückliche Wahl ankomme, mögen noch nachstehende beiden Beispiele bestätigen.

Hat man irgend eine der beiden Gleichungen

$$1) \qquad \frac{x \cdot \partial y - y \cdot \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} = f_{x^2+y^2}$$

oder

$$2) \qquad \frac{x \cdot \partial y - y \cdot \partial x}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} = f_\omega, \quad \text{wo } \omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ ist,}$$

in denen f eine ganz beliebige Funktion vorstellt, so macht man

$$x = uv \qquad \text{und} \qquad y = u \cdot \sqrt{1-v^2},$$

und die gegebenen Gleichungen (1. und 2.) verwandeln sich beziehlich in

$$3) \qquad \frac{-u^2 \cdot \partial v}{\sqrt{u^2 \cdot \partial v^2 + (1-v^2) \cdot \partial u^2}} = f_{u^2}$$

---

*) Setzt man übrigens in die gegebene Gleichung

$$B \cdot \partial y_x^k = A \cdot x^\alpha + y^\beta \quad \text{oder} \quad v = \left(\frac{A \cdot x^\alpha + y^\beta}{B}\right)^{\frac{1}{k}},$$

$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot u$, so erhält man

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \partial u + \frac{\alpha}{\beta} \cdot x^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} \cdot u \cdot \partial x = x^{\frac{\alpha}{k}} \cdot \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \cdot u^\beta\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Setzt man nun voraus $k = \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$, also $\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{k}$, so hat man

$$\beta \cdot x^{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{k}} \cdot \partial u + \alpha \cdot u \cdot \partial x = \beta \cdot \partial x \cdot \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \cdot u^\beta\right)^{\frac{1}{k}},$$

woraus

$$\frac{\partial x}{x^{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{k}}} = \frac{\beta \cdot \partial u}{\beta \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \cdot u^\beta\right)^{\frac{1}{k}} - \alpha u}$$

hervorgeht, so daß nun die Veränderlichen getrennt sind.

und 4) $$\frac{-u\cdot\partial v}{\sqrt{u^2\cdot\partial v^2+(1-v^2)\cdot\partial u^2}} = f_v,$$

woraus beziehlich nachstehende getrennte Gleichungen hervorgehen, nämlich

5) $$\frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\partial u\cdot f_{u^2}}{u\cdot\sqrt{u^2-f_{u^2}}}$$

und 6) $$\frac{\partial v\cdot\sqrt{1-f_{v^2}}}{f_v\cdot\sqrt{1-v^2}} = \frac{\partial u}{u}.$$

IV. Ist die Gleichung der ersten Ordnung

$$A\cdot x^m\cdot y^n\cdot\partial y+B\cdot x^p\cdot y^q\cdot\partial x = C\cdot x^r\cdot y^s\cdot\partial x$$

gegeben, so kann man sie zunächst dadurch einfacher machen, daß man sie durch $A\cdot x^m\cdot y^s$ dividirt. Dadurch erhält man

$$y^{n-s}\cdot\partial y+\frac{B}{A}\cdot x^{p-m}\cdot y^{q-s}\cdot\partial x = \frac{C}{A}\cdot x^{r-m}\cdot\partial x.$$

Hernach kann man zwei neue Veränderliche v und u so einführen, daß

$$y^{n-s}\cdot\partial y = \frac{\partial v}{n-s+1} \quad \text{und} \quad x^{r-m}\cdot\partial x = \frac{\partial u}{r-m+1},$$

also $y^{n-s+1} = v$ und $x^{r-m+1} = u$

wird. Dadurch aber wird die gegebene Differenzialgleichung unmittelbar auf die Form

$$\partial v+b\cdot v^n\cdot\partial u = a\cdot u^m\cdot\partial u$$

gebracht, welche wir bereits (§. 354. III.) hingestellt, und für den Fall näher betrachtet haben, in welchem $n = 2$ ist, und in welchem die Gleichung die Riccati'sche genannt wird.

V. Ist die gegebene Differenzialgleichung von der 2ten Ordnung, z. B.

1) $$x^2\cdot\partial^2 y_x+x+y\cdot\partial y_x^2 = 0,$$

und als homogen anzusehen, sobald man $\partial^2 y_x$ als zur (−1)ten, dagegen ∂y_x als zur 0ten Dimension gehörig betrachtet, so führet man 3 neue Veränderliche durch die Gleichungen

2) $y = u\cdot x^1$, 3) $\partial y_x = p\cdot x^0 = p$, 4) $\partial^2 y_x = q\cdot x^{-1}$

ein, und erhält, indem man diese Werthe in die gegebene Diffe-

renzialgleichung substituirt, eine Gleichung zwischen q, u und p ohne x, nämlich

$$5) \qquad q + 1 + u \cdot p^2 = 0,$$

aus welcher q in u und p ausgedrückt gefunden werden kann. Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen (2. und 3.) jede Spur von y (nach V. Th. d. S. §. 281. indem man vorher die 2. noch differenzirt), so erhält man

$$6) \qquad p \cdot \partial x = u \cdot \partial x + x \cdot \partial u \quad \text{oder} \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}.$$

Eliminirt man ferner aus (3. und 4.) jede Spur von y (indem man die (3.) noch einmal differenzirt), so ergiebt sich weiter

$$7) \qquad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{q},$$

und aus (6. und 7.) sogleich

$$8) \qquad \frac{\partial p}{q} = \frac{\partial u}{p - u},$$

in welcher Gleichung statt q nur noch der Werth aus (5.) gesetzt werden darf, um diejenige Gleichung der 1ten Ordnung zwischen p, u, ∂p, ∂u zu haben, auf welche sich die gegebene Differenzialgleichung der 2ten Ordnung reduzirt. — Integrirt man diese Gleichung (8.), und setzt man dann $\frac{y}{x}$ statt u, so wie ∂y_x statt p, so hat man die Differenzialgleichung zwischen x, y und ∂y_x der ersten Ordnung, welche das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung der 2ten Ordnung ist.

Hat man aber aus der Gleichung (8.) durch Integration eine Urgleichung zwischen p und u, nämlich

$$9) \qquad \psi_{p,u} = 0$$

gefunden, so kann man aus dieser letzteren p in u ausgedrückt finden, und diesen Werth für p in die Gleichung (6.) substituiren, die entstehende Gleichung aber dann integriren, um eine Urgleichung zwischen x und u zu erhalten, welche durch

$$10) \qquad \varphi_{x,u} = 0$$

ausgedrückt seyn mag. Eliminirt man dann zuletzt aus den Glei-

chungen (2. und 10.) den Buchstaben u, so erhält man sogleich ein allgemeines Ur-Integral zwischen y und x mit den beiden willkührlichen Konstanten, welche die Integrale (9. und 10.) in in sich aufgenommen haben.

Das Verfahren erleidet wesentlich keine Abänderung, wenn man auch, um die Integrationen (9. und 10.) durchführen zu können, dazu abermals neue Veränderliche einführt.

Auch erhellet aus dem genommenen Gange, daß die Gleichungen (6., 7. und 8.) immer genau dieselben bleiben, wie auch die gegebene Differenzialgleichung beschaffen seyn mag, und daß der Erfolg dieser Methode darauf beruht, daß aus der Gleichung (5.), in welche die gegebene Differenzialgleichung durch diese Substitutionen übergeht, alle x herausfallen.

Beispiel 1. Ist die gegebene Gleichung der 2ten Ordnung diese:

$$1) \qquad x^2 \cdot \partial^2 y_x = \sqrt{m \cdot x^2 \cdot \partial y_x{}^2 + n \cdot y^2},$$

so giebt sie durch obige Substitution jetzt

$$5) \qquad q = \sqrt{m \cdot p^2 + n \cdot u^2};$$

und die Gleichung (8.) wird daher jetzt

$$8) \qquad \frac{\partial p}{\sqrt{m \cdot p^2 + n \cdot u^2}} = \frac{\partial u}{p - u}.$$

Diese Gleichung kann nun integrirt werden, weil sie homogen ist, indem man $p = t \cdot u$ setzt, und

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{-(t-1) \cdot \partial t}{t^2 - t - \sqrt{m \cdot t^2 + n}}; \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u} = \frac{-\partial t}{t^2 - t - \sqrt{m t^2 + n}}$$

erhält, so daß u d. h. $\frac{y}{x}$ und x in t ausgedrückt erscheinen, also das Ur-Integral gefunden wird, wenn man zuletzt t eliminirt.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad \frac{(1 + \partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = n \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \; *)$$

*) Diese Gleichung erhält man, sobald eine Kurve $y = y_x$ so gesucht wird, daß ihr Krümmungshalbmesser an jedem ihrer Punkte mit der Entfernung dieses Punktes vom Anfangspunkt der Kordination beständig ein und dasselbe Verhältniß 1 : n behalte.

so verwandelt sie die gedachte Substitution in

$$5) \qquad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = n\cdot\sqrt{1+u^2},$$

so daß die Gleichung (8.) jetzt wird

$$8) \qquad (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\partial u = n\cdot(p-u)\cdot\partial p\cdot\sqrt{1+u^2}.$$

Diese muß nun integrirt werden. Um dies zu bewerkstelligen, führt Euler zwei neue Veränderliche r und s so ein, daß er

$$11) \quad p = tg\ r \quad \text{und} \quad 12) \quad u = tg\ s$$

setzt, wodurch die Gleichung (8.) in

$$13) \qquad \partial s = n\cdot\partial r\cdot Sin\ (r-s)$$

übergeht. Dann führt Euler, um diese (13.) zu integriren, wiederum einen neuen Veränderlichen t ein, mittelst der Gleichung

$$14) \qquad r-s = t.$$

Dadurch geht die (13.) über in

$$15) \quad \partial r = \frac{\partial t}{1-n\cdot Sin\ t} \quad \text{oder} \quad \partial s = \frac{n\cdot\partial t\cdot Sin\ t}{1-n\cdot Sin\ t},$$

welche Gleichungen (15.) statt der Gleichung (8.) stehen. Die Gleichung (6.) des Textes wird ferner jetzt

$$16) \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial s\cdot Cos\ r}{Cos\ s\cdot Sin\ t} = \frac{\partial s\cdot Cos\ (s+t)}{Cos\ s\cdot Sin\ t},$$

d. h.

$$17) \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial s\cdot Cos\ t}{Sin\ t} - \frac{\partial s\cdot Sin\ s}{Cos\ s}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{n\cdot\partial t\cdot Cos\ t}{1-n\cdot Sin\ t} - \frac{\partial s\cdot Sin\ s}{Cos\ s}.$$

Diese letztere Gleichung integrirt, giebt

$$18) \qquad x = \frac{c\cdot Cos\ s}{1-n\cdot Sin\ t};$$

und dann hat man auch, wegen $y = u\cdot x$,

$$19) \qquad y = \frac{c\cdot Sin\ s}{1-n\cdot Sin\ t},$$

während aus (14. und 15.) $s = -t+r$ d. h.

$$20) \qquad s = -t+\int\frac{1}{1-n\cdot Sin\ t}\cdot dt+c_1$$

ist. — Setzt man statt s wiederum $r-t$, so hat man

$$x = \frac{c\cdot Cos\ (r-t)}{1-n\cdot Sin\ t}; \quad y = \frac{c\cdot Sin\ (r-t)}{1-n\cdot Sin\ t}; \quad r = \int\frac{1}{1-n\cdot Sin\ t}\cdot dt+c_1;$$

wo statt des bloß angezeigten Integrals irgend eines seiner besondern Integrale genommen werden kann.

VI. Man kann auch die Methode verallgemeinern, und in die gegebene Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, wie sie auch seyn mag,

$$1)\ y = x \cdot u, \quad 2)\ \partial y_x = x^{n-1} \cdot p, \quad 3)\ \partial^2 y_x = x^{n-2} \cdot q$$

setzen, und dann erst nachsehen, ob sich nicht durch eine schickliche Annahme von n aus der erhaltenen Gleichung die x wegdividiren lassen, so daß man

4) q in p und in u

ausgedrückt erhält. Aus (1. und 2.) erhält man aber jetzt

$$5)\quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - nu},$$

so wie aus (2. und 3.) wiederum

$$6)\quad \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial p}{q - (n-1) \cdot p};$$

so daß aus (5. und 6.) hervorgeht

$$7)\quad [q - (n-1)p] \cdot \partial u = (p - nu) \cdot \partial p,$$

welches die Gleichung ist von der 1sten Ordnung, auf welche sich die gegebene Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung zurückzieht, sobald sie die Form (4.) angenommen hat.

Hat man die (7.) integrirt, also p in u ausgedrückt gefunden, so giebt die (6.) wiederum, wenn man sie integrirt, eine Gleichung zwischen x und u, d. h. zwischen x und $\frac{y}{x}$, d. h. zwischen x und y, genau so wie in der vorhergehenden Nummer (V.).

Beispiel 1. Hat man die Gleichung

$$\partial^2 y = a \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \partial y^{\gamma},$$

so erhält man durch obige Substitution statt der obigen Gleichung (4.),

$$x^{n-2} \cdot q = a \cdot x^{\alpha + \beta n + \gamma(n-1)} \cdot u^{\beta} \cdot p^{\gamma}$$

oder

$$q = a \cdot u^{\beta} \cdot p^{\gamma};$$

wenn n so genommen wird, daß man $n-2 = \alpha+\beta n+\gamma(n-1)$ hat. Die Gleichung (7.) wird dasmal

$$[a\cdot u^{\beta}\cdot p^{\gamma}-(n-1)p]\cdot \partial u = (p-nu)\cdot \partial p,$$

welche jetzt noch integrirt werden muß.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

$$x^4\cdot \partial^2 y_x = x^3\cdot \partial y_x + 2xy\cdot \partial y_x - 4y^2,$$

so findet sich durch obige Substitution

$$x^{n+2}\cdot q = x^{n+2}\cdot p + 2x^{2n}\cdot up - 4x^{2n}\cdot u^2;$$

so daß, für $n+2 = 2n$ oder $n = 2$, dieselbe Gleichung in

$$q = p+2up-4u^2$$

übergeht. Die Gleichung (7.) wird nun

$$2u\cdot(p-2u)\cdot \partial u - (p-2u)\cdot \partial p = 0$$

d. h. $p-2u = 0$ und $2u\cdot \partial u - \partial p = 0$ oder $u^2-p = c$.

Aus letzterem folgt weiter

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{u^2-2u+c} \quad \text{oder} \quad log\, x = \int \frac{1}{u^2-2u+c}\cdot du + c_1.$$

Ist nun $c = 1$, so wird $log\, x = \frac{1}{1-u} + C_1$.

Ist aber $c = 1-C^2$, so wird $log\, x = \frac{1}{2C}\cdot log\, \frac{C+u-1}{C+u+1} + C_1$.

Ist endl. $c = 1+C^2$, so wird $log\, x = \frac{1}{C}\cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{u-1}{C} + C_1$.

In diesen letztern beiden Resultaten darf man nur noch $\frac{y}{x^2}$ statt u setzen, um das Integral zwischen y und x mit den beiden willkührlichen Konstanten C und C_1 zu haben.

Der andere Faktor $p-2u = 0$ führt zu einem singulären Werthe.

Beispiel 3. Manchmal wird $n = 0$; dies ist der Fall bei der Gleichung

1) $$x^2\cdot \partial^2 y_x + x\cdot \partial y_x - 4y^3 = 0$$

und bei jeder Gleichung, welche homogen ist, sobald man y zur 0ten, ∂y_x zur (−1)sten und $\partial^2 y_x$ zur (−2)ten Dimension zählt. Man hat dann $y = u$; die gegebene Differenzialgleichung geht über in

4) $$q+p-4y^3 = 0$$

und die Gleichung (7.) wird

7) $(q+p)\cdot\partial y = p\cdot\partial p$ oder $4y^3\cdot\partial y = p\cdot\partial p$,

und giebt, wenn man sie integrirt,

$$2y^4 = p^2+c.$$

Außerdem erhält man aus der Gleichung (5.) des Textes

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{\sqrt{2y^4-c}},$$

welche, da die Veränderlichen getrennt sind, integrirt werden kann, und

$$log\, x = \int \frac{1}{\sqrt{2\cdot y^4-c}}\cdot dy+c_1$$

als das Ur-Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1 liefert.

VII. Sollte man finden, daß die Methode der (VI.) in einem besonderen Falle $n = \frac{1}{0}$ liefert, so daß man eben dadurch überzeugt ist, daß jene Methode nun nicht mehr statt findet, so kann man die zwei neuen Veränderlichen p und q so einführen, daß

1) $\partial y_x = p\cdot y$ und 2) $\partial^2 y_x = q\cdot y$

wird; und man erhält dann, wenn diese erstere differenzirt und mit der 2ten verglichen wird,

$$p\cdot\partial y_x+y\cdot\partial p_x = q\cdot y$$

oder 3) $p^2+\partial p_x = q$ oder $(p^2-q)\cdot\partial x+\partial p = 0.$

Wird nun durch dieselbe Substitution von $p\cdot y$ statt ∂y_x und $q\cdot y$ statt $\partial^2 y_x$ die gegebene Differenzialgleichung in eine andere verwandelt, welche kein y, sondern bloß x, p und q hat, so daß man aus ihr

4) q in x und in p

ausgedrückt herstellen kann, so darf man diesen Werth für q nur in (3.) noch substituiren, um die Gleichung der 1sten Ordnung zu haben, auf welche sich die gegebene der 2ten Ordnung zurückführen läßt. Integrirt man dieselbe, so erhält man p in x (oder x in p) mit einer willkührlichen Konstante c. Setzt man nachgehends diesen Werth p_x von p in die Gleichung (1.) nämlich in

$$\partial y_x = p \cdot y,$$

so erhält man

$$5) \qquad \frac{\partial y}{y} = p_x \cdot \partial x$$

also auch

$$6) \qquad log\ y = \int p_x \cdot dx + c_1,$$

und dies ist das Ur-Integral der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1.

Diese Methode wird man allemal anwenden können, wenn die gegebene Differenzialgleichung, bloß in Bezug auf y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ angesehen, homogen ist.

Beispiel. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$1) \qquad a \cdot y \cdot \partial^2 y + b \cdot \partial y^2 = \frac{y \cdot \partial y}{\sqrt{1+x^2}},$$

so wird sie durch die gedachte Subsitution

$$2) \qquad aq + bp^2 = \frac{p}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Die (3) des Textes dagegen wird dasmal

$$3) \qquad \partial p + p^2 \cdot \partial x = \frac{p \cdot \partial x}{a \cdot \sqrt{\cdot 1+x^2}} - \frac{bp^2 \cdot \partial x}{a},$$

und diese muß also nun integrirt werden.

Führt man zu dem Ende einen neuen Veränderlichen s dadurch ein, daß man

$$4) \qquad p = \frac{1}{s}$$

setzt, so geht die Gleichung (3.) über in

$$5) \qquad \partial s + \frac{s \cdot dx}{a \cdot \sqrt{1+x^2}} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \partial x,$$

welche zum integrirenden Faktor hat $(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}}$, so daß sie, damit multiplizirt und integrirt,

$$6) \qquad s \cdot (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \int (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}} \cdot dx$$

liefert; oder, wenn $(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}} = u$ gesetzt wird,

$$7) \qquad s \cdot u = \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{u^{1+a}}{1+a} + \frac{u^{1-a}}{1-a} \right) + c.$$

Ferner hat man

$$8) \qquad \frac{\partial y}{y} = p \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{1}{s} \cdot \partial x,$$

und aus (5.)

$$9) \qquad \left(1+\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\partial x}{s} = \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial x}{a \cdot \sqrt{1+x^2}}.$$

Setzt man hier statt $\frac{\partial x}{s}$ links seinen Werth $\frac{\partial y}{y}$ aus (8.), und integrirt man, so findet sich

$$10) \quad \left(1+\frac{b}{a}\right) \cdot log\, y = log\, s + \frac{1}{a} \cdot log\, (x+\sqrt{1+x^2}) + log\, c_1$$

oder

$$11) \quad y^{\frac{a+b}{a}} = c_1 \cdot s \cdot (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{a}}$$

$$= c_1 \cdot s \cdot u = c_1 \cdot \left(\frac{a+b}{2} \left(\frac{u^{1+a}}{1+a} + \frac{u^{1-a}}{1-a} \right) + c \right)$$

oder, indem man die Konstanten c und c_1 in $\frac{c(a+b)}{2}$ und $\frac{2c_1}{a+b}$ umwandelt,

$$12) \quad y^{\frac{a+b}{a}} =$$

$$c_1 \cdot \left(\frac{1}{1+a} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1+a}{a}} + \frac{1}{1-a} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1-a}{a}} + c \right).$$

Und diese Gleichung (12.) ist nun das Ur-Integral der gegebenen Differenzialgleichung, mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1.

VIII. In Gleichungen, welche in Bezug auf x, y und den Ableitungen von y nach x homogen sind, wendet man auch noch folgende Substitutionen an, nämlich

$$1) \quad x = e^u, \qquad 2) \quad y = e^u \cdot v;$$

so daß

3) $\partial x = e^u \cdot \partial u$; 4) $\partial y = e^u \cdot (v \cdot \partial u + \partial v)$;

5) $\partial^2 x = e^u \cdot (\partial^2 u + \partial u^2)$;

6) $\partial^2 y = e^u \cdot (v \cdot \partial u^2 + 2\partial u \cdot \partial v + v \cdot \partial^2 u + \partial^2 v)$;

u. s. w. f. wird. — Will man nun nicht zuerst die gegebene Differenzialgleichung zwischen x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc. nach (§. 352.) umformen, so muß man in den Gleichungen (3.—6. ꝛc. ꝛc.) unter den bloßen ∂ lauter Ableitungen nach x sich denken, wodurch diese Gleichungen (3.—6.) in

7) $1 = e^u \cdot \partial u_x$; 8) $\partial y_x = e^u \cdot (v \cdot \partial u_x + \partial v_x)$;

9) $0 = \partial^2 u_x + \partial u_x^2$; 10) $\partial^2 y_x = e^u \cdot (\partial^2 v_x + 2\partial u_x \cdot \partial v_x)$;

u. s. w. f. übergehen.

Substituirt man nun diese Werthe statt x, y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in eine Gleichung der 2ten Ordnung, welche nach x, y und deren Ableitungen homogen ist, so werden offenbar die u von selber sich wegheben, so daß bloß noch v, ∂v_x, $\partial^2 v_x$ und ∂u_x bleibt. Um nun die so eben entstandene Gleichung auf eine Gleichung der 1sten Ordnung zurückzuführen, so führt man noch einen dritten neuen Veränderlichen p ein, mittelst der Gleichung

$$11) \qquad \partial v_x = p \cdot \partial u_x \text{ oder } \partial u_x = \frac{1}{p} \cdot \partial v_x;$$

und es wird

$$\partial^2 v_x = \partial p_x \cdot \partial u_x + p \cdot \partial^2 u_x,$$

oder, wenn man hier aus (9.) den Werth für $\partial^2 u_x$ substituirt,

$$12) \quad \partial^2 v_x = (\partial p_x - p \cdot \partial u_x) \cdot \partial u_x = \frac{1}{p} \cdot (\partial p_x - \partial v_x) \cdot \partial v_x.$$

Hat man jetzt aus (11. und 12.) sowohl ∂u_x als auch $\partial^2 v_x$ in p, ∂p_x und ∂v_x ausgedrückt gefunden, und substituirt man diese Werthe statt ∂u_x und $\partial^2 v_x$ in die obige Differenzialgleichung, welche an die Stelle der gegebenen getreten ist, so geht sie in eine Gleichung über zwischen v, p, ∂v_x und ∂p_x, welche zuletzt noch in eine Gleichung zwischen v, p und ∂p_v (oder zwischen v, p, ∂v_p) umgewandelt werden muß, und welche nur Ableitungen der ersten Ordnung enthält. Integrirt

man nun diese letztere, so erhält man p in v und c (oder v in p und c) ausgedrückt, wo c eine willkührliche Konstante ist. — Die Gleichung (11.) giebt dann durch nochmalige Integration auch eine Gleichung zwischen u und v und zwei willkührlichen Konstanten c und c_1. Eliminirt man zuletzt aus dieser letztern und den Gleichungen (1. und 2.) u und v selbst, so erhält man die gesuchte Urgleichung zwischen y und x.

IX. Ist die gegebene Differenzialgleichung nicht ganz so, wie sie in der vorigen Nummer (VIII.) vorausgesetzt worden ist, so kann man doch zuweilen noch versuchen

$$x = e^{nu} \quad \text{und} \quad y = e^{u} \cdot v$$

zu setzen. Man hat dann

$$\partial x_x = e^{nu} \cdot n \cdot \partial u_x = 1; \qquad \partial y_x = e^{u} \cdot (v \cdot \partial u_x + \partial v_x);$$

$$\partial^2 x_x = e^{nu} \cdot (n^2 \cdot \partial u_x^2 + n \cdot \partial^2 u_x) = 0;$$

$$\partial^2 y_x = e^{u} \cdot \left(\partial^2 v_x + 2\partial u_x \cdot \partial v_x + v(\partial u_x^2 + \partial^2 u_x)\right);$$

oder auch, wenn man aus den letzten beiden Gleichungen $\partial^2 u_x$ eliminirt,

$$\partial^2 y_x = e^{u} \cdot (\partial^2 v_x + 2\partial u_x \cdot \partial v_x + (1-n) \cdot v \cdot \partial u_x^2).$$

Setzt man nun diese Werthe statt x, y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die gegebene Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, so erhält man eine Gleichung zwischen v, ∂v_x, ∂u_x, $\partial^2 v_x$, welche jedoch auch noch u enthalten kann. Werden nun doch wieder, genau wie in (VIII.), die Werthe $\frac{1}{p} \cdot \partial v_x$, $\frac{1}{p} \cdot (\partial p_x - \partial v_x) \cdot \partial v_x$ beziehlich statt ∂u_x und $\partial^2 v_x$ substituirt, so muß man zuletzt darauf sehen, daß

1) die neue Gleichung die Form

$$M \cdot \partial p_x + N \cdot \partial v_x = 0$$

annimmt; daher muß man für alle ∂v_x, welche nicht zu dieser Form passen, ihren Werth $\frac{1}{p} \cdot \partial u_x$ d. h. (weil $\partial u_x = \frac{1}{n} \cdot e^{-nu}$ ist) den Werth $\frac{1}{np} \cdot e^{-nu}$ substituiren, um sie fortzuschaffen.

Ferner muß

2) n zuletzt so angenommen werden, daß aus dieser neuen Gleichung

$$M \cdot \partial p_x + N \cdot \partial v_x = 0$$

alle u herausfallen, so daß M und N nur noch p und v enthalten, die entstehende Gleichung selbst eine der Formen

$$M + N \cdot \partial v_p = 0 \quad \text{oder} \quad M \cdot \partial p_v + N = 0$$

annehmen könne, während M und N Funktionen bloß von p und v sind.

Wendet man dies auf die Gleichung

$$\partial^2 y_x = a \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \partial y_x$$

an, so wird sie

$$\partial^2 v_x + 2\partial u_x \cdot \partial v_x + (1-n) \cdot v \cdot \partial u_x^2 = a \cdot e^{n\alpha u + \beta u + \gamma u - u} \cdot v^\beta \cdot (\partial v_x + v \cdot \partial u_x^\gamma).$$

Setzt man nun hier statt $\partial^2 v_x$ und ∂u_x die obigen Werthe

$$\frac{1}{p} \cdot (\partial p_x - \partial v_x) \cdot \partial v_x \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} \cdot \partial v_x,$$

so erhält man

$$\frac{1}{p} \cdot \partial p_x \cdot \partial v_x + \frac{1}{p} \cdot \partial v_x^2 + \frac{(1-n) \cdot v}{p^2} \cdot \partial v_x^2 = a \cdot e^{(n\alpha + \beta + \gamma - 1) \cdot u} \cdot v^\beta \left(1 + \frac{v}{p}\right)^\gamma \cdot \partial v_x^\gamma.$$

Diese Gleichung wird nun aber auf die Form $M \cdot \partial p_x + N \cdot \partial v_x = 0$ zurückgebracht, sobald man ∂v_x^γ in $\partial v_x^2 \cdot \partial v_x^{\gamma-2}$ zerlegt, und dann statt $\partial v_x^{\gamma-2}$ seinen Werth $\frac{1}{n^{\gamma-2}} \cdot e^{(2-\gamma) \cdot nu}$ setzt. Dadurch geht die obige Gleichung über in

$$\frac{1}{p} \cdot \partial p_x + \frac{1}{p} \cdot \partial v_x + \frac{(1-n) \cdot v}{p^2} \cdot \partial v_x = a \cdot e^{(n\alpha + \beta + \gamma - 1 + 2n - \gamma n) \cdot u} \cdot v^\beta \left(1 + \frac{v}{p}\right)^\gamma \cdot \partial v_x.$$

Wird nun hier n so genommen, daß

$$n\alpha + \beta + \gamma - 1 + 2n - \gamma n = 0 \quad \text{d. h.} \quad n = \frac{1-\beta-\gamma}{2+\alpha-\gamma} \quad \text{ist,}$$

so fällt aus dieser Gleichung u wirklich heraus; sie ist eine Differenzialgleichung der 1sten Ordnung zwischen p, v, ∂v_p oder zwischen

p, v, ∂p_v, je nachdem man sie durch ∂p_x oder durch ∂v_x wegdividirt, weil $\frac{\partial v_x}{\partial p_x} = \partial v_p$ und $\frac{\partial p_x}{\partial v_x} = \partial p_v$ ist.

X. Es kann auch Fälle geben, wo es bequem ist, bloß $x = e^u$ zu setzen, und y zu lassen, wenn man nur dadurch bewirkt, daß u aus der entstehenden Gleichung ganz wegfällt. — Dies ist aber allemal brauchbar, so oft die Gleichung zwischen x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ꝛc. ꝛc. als homogen erscheint, wenn man ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ ꝛc. ꝛc. beziehlich als Ausdrücke von der (—1)ten, (—2)ten, (—3ten) ꝛc. ꝛc., y dagegen als einen Ausdruck von der 0ten Dimension ansieht. *)

So z. B. geht die Gleichung

$$y + x \cdot \partial y_x + y^3 \cdot x^2 \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

indem man $x = e^u$ setzt, sogleich über in

$$y + (1 - y^3) \cdot \partial y_u + y^3 \cdot \partial^2 y_u = 0,$$

und wird nun eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen y, v und ∂v_y, wenn man in ihr $\frac{1}{\partial u_y}$ statt ∂y_u, dann $-\frac{\partial^2 u_y}{\partial u_y^3}$ statt $\partial^2 y_u$, endlich $\partial u_y = v$ also $\partial^2 u_y = \partial v_y$ setzt. Wird diese Gleichung nachgehends integrirt, so daß man eine Urgleichung zwischen y, v und einer willkührlichen Konstante c erhält, so liefert $\partial u_y = v$ sogleich noch $u = \int v \cdot dy$; und zuletzt ist

$$x = e^{\int v \cdot dy + c_1} = C \cdot e^{\int v \cdot dy}$$

das allgemeine Ur-Integral der gegebenen Gleichung der 2ten Ordnung.

XI. Endlich kann es Fälle geben, wo man bloß

$$y = e^u$$

setzt, und x stehen läßt. Dies ist brauchbar, so oft die gegebene Differenzialgleichung, bloß in Bezug auf y und dessen Ableitungen angesehen, homogen ist.

---

*) Setzt man im Sinne der Leibnitzischen Zeichen

$\frac{dy}{dx}$ statt ∂y_x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ statt $\partial^2 y_x$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ statt $\partial^3 y_x$, u. s. w.

so wird dieselbe Gleichung dann allemal nach x und dx homogen.

In diesem Falle kann man dem u auch sogleich die Form $\int t \cdot dx$ geben, also sogleich

$$y = e^{\int t \cdot dx}$$

setzen, und man wird dann die neue Gleichung augenblicklich von einer um 1 niedrigern Ordnung haben.

Hat man z. B. die Gleichung

$$1) \quad A_x \cdot y^2 + B_x \cdot y \cdot \partial y_x + C_x \cdot \partial y_x \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

und setzt man hier

$$2) \quad y = e^u,$$

so hat man

$$3) \quad \partial y_x = e^u \cdot \partial u_x, \quad 4) \quad \partial^2 y_x = e^u \cdot (\partial u_x^2 + \partial^2 u_x).$$

Substituirt man nun diese Werthe, so ergiebt sich

$$5) \quad A_x + B_x \cdot \partial u_x + C_x \cdot \partial u_x^3 + C_x \cdot \partial u_x \cdot \partial^2 u_x = 0,$$

welche Gleichung ausser x kein u mehr hat, also sogleich von einer um 1 niedrigern Ordnung wird, wenn man

$$6) \quad \partial u_x = t$$

setzt, weil sie dann in

$$7) \quad A_x + B_x \cdot t + C_x \cdot t^3 + C_x \cdot t \cdot \partial t_x = 0$$

übergeht.

Aus $\partial u_x = t$ folgt aber $u = \int t \cdot dx$. Hätte man daher sogleich

$$8) \quad y = e^{\int t \cdot dx}$$

gesetzt, so hätte man gehabt

$$9) \quad \partial y_x = e^{\int t \cdot dx} \cdot t, \quad 10) \quad \partial^2 y_x = e^{\int t \cdot dx} \cdot (t^2 + \partial t_x),$$

und dann hätte man, wenn diese Werthe in die (1.) substituirt worden wären, die (7.) von der 1sten Ordnung unmittelbar erhalten

Ein zweites Beispiel, in welchem diese letztere Substitution bequem anzuwenden ist, bieten diejenigen lineären Gleichungen dar, z. B. die Gleichung von der Form

$$\partial^2 y_x + A_x \cdot \partial y_x + B_x \cdot y = 0,$$

in welchen die einzelnen Glieder nach y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ebenfalls homogen sind, d. h. in welchen das von y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc. befreite Glied, welches im allgemeinen eine Funktion von x seyn kann, jetzt Null ist.

§. 359.

Man kann auch zwei neue Veränderliche durch 2 Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ so einführen, daß man zuerst nur eine dieser Gleichungen wählt, und die andere dann später noch so dazu nimmt, daß die gegebene Differenzialgleichung die gewünschte Form erhalte.

Wir heben hier einen bestimmten Fall hervor. Ist nämlich zu integriren die Gleichung der 1sten Ordnung

$$1) \qquad \partial y + P_x \cdot y \cdot \partial x = Q_x \cdot \partial x,$$

so führe man zwei neue Veränderliche v und u ein, aber einstweilen durch die einzige Gleichung

$$2) \qquad y = v \cdot u,$$

welche

$$3) \qquad \partial y = v \cdot \partial u + u \cdot \partial v$$

giebt. Setzt man diese Werthe statt y und ∂y in die (1.), so erhält man

$$4) \qquad v \cdot (\partial u + P_x \cdot u \cdot \partial x) + u \cdot \partial v = Q_x \cdot \partial x.$$

Da man nun zwischen x, y, u und v noch eine beliebige Abhängigkeit einführen kann, so setze man jetzt

$$5) \qquad \partial u + P_x \cdot u \cdot \partial x = 0,$$

und die Differenzialgleichung (4.) wird sogleich die einfache Form

$$6) \qquad u \cdot \partial v = Q_x \cdot \partial x$$

annehmen. Aus der (5.) folgt nun, da in ihr die Veränderlichen u und x getrennt werden können,

$$7) \qquad u = e^{-\int P \cdot dx},$$

wo man irgend eines der besonderen Integrale von P nach x nimmt. Dann aber ergiebt sich aus der (6.)

$$8) \qquad v = \int (Q \cdot e^{\int P \cdot dx}) \cdot dx + C.$$

Zuletzt ergiebt sich aus (2., 7. und 8.)

$$9) \qquad y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot \left(\int (Q \cdot e^{\int P \cdot dx}) \cdot dx + C \right)$$

als das gesuchte allgemeine Integral, wie solches auch (nach

(§. 349.), da diese Gleichung zu den lineären gehört, bereits gefunden worden ist. *)

Dritte Abtheilung.

Noch eine besondere Integrations-Methode für Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen.

Vorerinnerung.

Wir haben in dem (XIIten Kapitel d. V. Th. d. S.) und zwar in den (§. §. 165. 166. 271. 272. 276. 277.) eine allgemeine Integrationsmethode beigebracht, durch welche man allemal das Integral einer beliebigen Differenzialgleichung zwischen x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^n y_x$ in Form einer unendlichen, nach Potenzen von $x-\alpha$ fortlaufenden Reihe erhält. Wir haben aber auch zu gleicher Zeit gezeigt, daß diese unendliche Reihe allemal abbricht, also ein Integral in endlicher Form liefert, so oft eine der nach der angeführten Methode für die Ableitungen $\partial^n y_x$, $\partial^{n+1} y_x$, $\partial^{n+2} y_x$, $\partial^{n+3} y_x$, ꝛc. ꝛc. gefundenen Funktionen von x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... $\partial^{n-1} y_x$ identisch der Null gleich wird, so daß also eine der Ableitungen, z. B. $\partial^{n+m} y_x$, und dann alle folgenden der Null gleich werden.

Wir haben namentlich daselbst einen besondern Fall bemerkt, in welchem dieses letzterwähnte besondere Ereigniß allemal eintritt; nämlich

---

*) Auf diese Gleichung läßt sich aber auch diese andere

$$L_x \cdot y^{m-1} \cdot dy + M_x \cdot y^m \cdot \partial x = N_x \cdot y^n \cdot \partial x$$

zurückführen, indem man sie durch $L \cdot y^n$ dividirt, und zuletzt einen neuen Veränderlichen v so einführt, daß

$$y^{m-n} = (m-n) \cdot v, \text{ also } y^{m-n-1} \cdot \partial y = \partial v$$

wird. Die neue Gleichung wird dann

$$\partial v + (m-n) \cdot \frac{M}{L} \cdot v \cdot \partial x = \frac{N}{L} \cdot \partial x$$

d. h.

$$\partial v + P \cdot v \cdot \partial x = Q \cdot \partial x.$$

den Fall, wo die gegebene Differenzialgleichung der nten Ordnung die Form annimmt:

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad f_{v_n,\, v_{n-1},\, v_{n-2},\, \cdots v_3,\, v_2,\, v_1,\, v_0} = 0,$$

wo f eine willkührliche Funktion von den n+1 Ausdrücken

$$v_n,\, v_{n-1},\, v_{n-2},\, \cdots v_1,\, v_0$$

ist, während $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots v_{n-1}, v_n$ nachstehende Bedeutungen haben, nämlich

$$v_0 = \partial^n y_x;$$

$$v_1 = \partial^{n-1} y_x - x\cdot\partial^n y_x;$$

$$v_2 = \partial^{n-2} y_x - x\cdot\partial^{n-1} y_x + \frac{x^2}{2!}\cdot\partial^n y_x;$$

$$v_3 = \partial^{n-3} y_x - x\cdot\partial^{n-2} y_x + \frac{x^2}{2!}\cdot\partial^{n-1} y_x - \frac{x^3}{3!}\cdot\partial^n y_x;$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} = \partial y_x - x\cdot\partial^2 y_x + \frac{x^2}{2!}\cdot\partial^3 y_x - \frac{x^3}{3!}\cdot\partial^4 y_x + \cdots\cdot \pm\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\partial^{n-1} y_x \mp \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\partial^n y_x;$$

$$v_n = y - x\cdot\partial y_x + \frac{x^2}{2!}\cdot\partial^2 y_x - \frac{x^3}{3!}\cdot\partial^3 y_x + \cdots\cdot \mp\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\partial^{n-1} y_x \pm \frac{x^n}{n!}\cdot\partial^n y_x.$$

Weil nämlich unter diesen Voraussetzungen

$$\partial v_n = \pm\frac{x^n}{n!}\cdot\partial^{n+1} y_x; \qquad \partial v_{n-1} = \mp\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\partial^{n+1} y_x;$$

$$\partial v_{n-2} = \pm\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\partial^{n+1} y_x; \quad \partial v_{n-3} = \mp\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\cdot\partial^{n+1} y_x;$$

u.s.w.f. ist, so reduzirt sich die nächste Differenzialgleichung von $f = 0$, nämlich $\partial f = 0$, sogleich auf die Form

$$M\cdot\partial^{n+1} y_x = 0,$$

und giebt daher bereits $\partial^{n+1} y_x = 0$,

wenn man nicht $M = 0$ nehmen will, welche Annahme jedoch zu einem singulären Werth führen würde. *)

---

*) Das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$f = 0$$

Viel allgemeiner aber und ganz allgemein hat man die Sache ausgesprochen, wenn man sagt, daß jene Methode das Integral allemal in endlicher Form liefert, so oft das gesuchte allgemeine Ur-Integral der

---

haben wir daselbst so gefunden:

$$y = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{x^2}{2!} + C_3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + C_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_n \cdot \frac{x^n}{n!},$$

wo aber zwischen den $n+1$ Konstanten $C_0, C_1, C_2, \cdots C_n$ noch die Gleichung

$$[f] = 0$$

statt findet, welche letztere aus der obigen $f = 0$ dadurch hervorgegangen ist, daß man $C_0, C_1, C_2, \cdots C_n$ beziehlich statt $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \cdots v_0$ setzte.

Zu diesem Falle gehören aber

1) alle Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, welche bloß aus ∂y_x und $y - x \cdot \partial y_x$ zusammengesetzt sind, wie z. B.

$$\partial y_x^3 + a(y - x \cdot \partial y_x)^2 = 0;$$

2) alle Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung, welche bloß aus

$$\partial^2 y_x, \quad \partial y_x - x \cdot \partial^2 y_x \quad \text{und} \quad y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x$$

zusammengesetzt sind, wie z. B.

$$\partial^2 y_x \cdot (y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x) - (\partial y_x - x \cdot \partial^2 y_x)^2 - b \cdot \partial^2 y_x^3 = 0;$$

3) alle Differenzialgleichungen der 3ten Ordnung, welche bloß aus

$$\partial^3 y_x, \quad \partial^2 y_x - x \cdot \partial^3 y_x, \quad \partial y_x - x \cdot \partial^2 y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^3 y_x$$

und

$$y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x - \tfrac{1}{6} x^3 \cdot \partial^3 y_x$$

zusammengesetzt sind, wie z. B.

$$\sqrt{y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x - \tfrac{1}{6} x^3 \cdot \partial^3 y_x} = (\partial^2 y_x - x \cdot \partial^3 y_x)^{\frac{3}{2}} + \partial^3 y_x^2;$$

4) u. s. w. f.

Daß aber dieser Fall nur ein sehr besonderer desjenigen allgemeinen ist, von welchem eben die Rede ist, und in welchem jene Integral-Reihe abbricht, erkennt man daran, daß bei diesem schon $\partial^{n+1} y_x = 0$ wird, während in andern Fällen erst $\partial^{n+2} y_x$, oder erst $\partial^{n+3} y_x$, oder überhaupt erst $\partial^{n+m} y_x$ der Null gleich werden kann.

gegebenen Differenzialgleichung auf die Form $y = f_x$ gebracht werden kann, während f_x eine algebraische und ganze rationale Funktion von x ist.

§. 360.

Durch die vorstehenden Betrachtungen wird man veranlaßt, um eine gegebene Differenzialgleichung der nten Ordnung

$$F_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n} = 0,$$

wo $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$ die Ableitungen $\partial y, \partial^2 y, \partial^3 y, \cdots \partial^n y$ nach x vorstellen, in endlicher Form zu integriren, noch folgenden Versuch anzustellen:

1) Man differenzire die gegebene Gleichung $F = 0$ noch ein oder mehrere Male hinter einander nach allem x, verbinde zwei oder mehrere dieser Gleichungen auf algebraischem Wege mit einander (indem man entweder eine Transcendente, eine Wurzel oder eine Konstante, wenn noch eine solche in der gegebenen Gleichung und in ihren Ableitungen vorkommt, eliminirt, oder die neuen Gleichungen durch einander dividirt, oder dergl. mehr);

2) Man differenzire, wenn man will, diese Gleichung auf's neue ein oder mehrere Male nach allem x, und verbinde die entstehenden Gleichungen wiederum auf algebraischem Wege mit einander zu einer neuen Gleichung.

3) Man fahre so lange damit fort, bis man eine Differenzialgleichung $\varphi = 0$ hat von der n+mten Ordnung, aber einfach genug, um ihr allgemeines Ur-Integral angeben zu können.

4) Hat man aber das allgemeine Ur-Integral der letztern Gleichung $\varphi = 0$, mit den n+m willkührlichen Konstanten gefunden, so muß solches auch der $F = 0$ genügen. *) Findet man

*) Man muß so schließen: das allgemeine Ur-Integral $f = 0$ der gegebenen Differenzialgleichung der nten Ordnung $F = 0$, mit seinen n willkührlichen Konstanten, genügt allen aus $F = 0$ abgeleiteten Gleichungen, also auch der Gleichung $\varphi = 0$, und ist daher unter den besonderen Integralen der letztern, also auch in dem allgemeinen Ur-Integral dieser letztern mit seinen n+m willkührlichen Konstanten enthalten. Also müssen zwischen diesen letztern n+m

daher aus demselben sowohl y, als auch ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ꝛc. ꝛc. endlich $\partial^n y_x$, und setzt man diese Werthe statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x \ldots \partial^n y_x$ in die $F = 0$; so muß die entstehende Gleichung für jedes x statt finden (oder vielmehr es muß aus der entstehenden Gleichung x von selbst wegfallen). Dadurch erhält man aber m Gleichungen zur Bestimmung der m überflüssigen Konstanten, so daß man das Ur-Integral von $F = 0$ mit nur noch n willkührlichen Konstanten gefunden hat.

Beispiel 1. Gesetzt es wäre gegeben die Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad (y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x)^{\frac{3}{2}} = x,$$

so erhielte man durch neues Differenziren

$$2) \qquad \tfrac{3}{4}(y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot \partial^3 y_x = 1.$$

Dividirt man nun diese beiden Gleichungen durch einander, um die Wurzel wegzuschaffen, so erhält man

$$3) \qquad \tfrac{4}{3}(y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x) = x^3 \cdot \partial^3 y_x.$$

Wird nun diese Gleichung noch einmal differenzirt, so ergiebt sich

$$\tfrac{2}{3} x^2 \cdot \partial^3 y_x = 3x^2 \cdot \partial^3 y_x + x^3 \cdot \partial^4 y_x,$$

$$\text{oder} \quad 4) \qquad -\tfrac{7}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\partial^4 y_x}{\partial^3 y_x} = \frac{\partial(\partial^3 y_x)_x}{\partial^3 y_x}.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man

$$5) \quad log\, c - \tfrac{7}{3}\, log\, x = log\, \partial^3 y_x \quad \text{oder} \quad \partial^3 y_x = c \cdot x^{-\frac{7}{3}}.$$

Daraus folgt aber nach (§. 229 — §. 232. d. V. Th. d. S.)

$$6) \qquad y = c \cdot x^{\frac{2}{3}} + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3.$$

Von dieser Urgleichung (6.) müssen nun noch 2 der 4 Konstanten so bestimmt werden, daß solche der Gleichung (1.) genügt. Differenzirt man aber die (6), so erhält man

$$7) \qquad \partial y_x = \tfrac{2}{3} c x^{-\frac{1}{3}} + 2c_1 \cdot x + c_2$$

$$\text{und} \quad 8) \qquad \partial^2 y_x = -\frac{2}{9} c x^{-\frac{4}{3}} + 2c_1.$$

Konstanten m Gleichungen existiren, vermöge welcher dieses letztere in das für $\varphi = 0$ besondere, für $F = 0$ aber allgemeine Integral $f = 0$ übergeht.

Setzt man nun diese Werthe aus (6. 7. u. 8.) statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die Gleichung (1.), so erhält man

$$9) \qquad \frac{2}{9} c \cdot x^{\frac{3}{2}} + c_3 = x^{\frac{3}{2}};$$

und diese Gleichung, da aus ihr x wegfallen muß, führt zu den Bestimmungen

$$10) \qquad c_3 = 0 \text{ und } c = \frac{9}{2};$$

also daß man hat aus (6.)

$$11) \qquad y = \frac{9}{2} x^{\frac{2}{3}} + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x$$

als das allgemeine Integral der Gleichung (1.).

Hätte man die Gleichung (1.) vorher quadrirt, um

$$12) \qquad (y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x)^3 = x^2,$$

zu erhalten, und diese dann differenzirt, so wäre hervorgegangen

$$13) \qquad \tfrac{3}{2} \cdot (y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x)^2 \cdot x^2 \cdot \partial^3 y_x = 2x.$$

Hätte man nachgehends diese Gleichung mit $\frac{3}{2}$ potenzirt, um

$$14) \qquad (y - x \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2} x^2 \cdot \partial^2 y_x)^3 \cdot \partial^3 y_x^{\frac{3}{2}} = (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

zu haben, so hätte die Division der (14.) durch die (12.) geliefert

$$15) \qquad \partial^3 y_x^{\frac{3}{2}} = (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{7}{2}} \text{ oder } \partial^3 y_x = \tfrac{4}{3} x^{-\frac{7}{3}}.$$

Daraus wäre dann sogleich hervorgegangen

$$16) \qquad y_x = \tfrac{9}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} + c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3,$$

worin nur eine Konstante zu viel ist. Setzt man aber diesen Werth statt y_x, so wie seine Ableitungen statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ in die (1.), so erhält man $c_3 = 0$.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung der 1sten Ordnung

$$1) \qquad A \cdot xy \cdot \partial y_x^2 + (x^2 - A \cdot y^2 - B) \cdot \partial y_x - xy = 0,$$

so erhält man, wenn man sie differenzirt, dann aus beiden B (d. h. $x^2 - A \cdot y^2 - B$) eliminirt, nachgehends aber durch $A \cdot \partial y_x^2 + 1$ dividirt, die Gleichung

$$2) \quad xy \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x \cdot (x \cdot \partial y_x - y) = 0 \text{ oder } \frac{\partial^2 y_x}{\partial y_x} + \frac{\partial y_x}{y} - \frac{1}{x} = 0.$$

Diese Gleichung integrirt sich aber unmittelbar, und giebt, wenn man von jedem einzelnen Gliede das Integral nimmt,

3) $log\, \partial y_x + log\, y - log\, x = log\, c$ oder $y \cdot \partial y_x = c \cdot x$.

Und diese Gleichung, auf's neue integrirt, giebt wiederum

4) $$y^2 = c \cdot x^2 + c_1,$$

welches das Ur-Integral der Gleichung (1.) seyn muß, sobald die Konstanten c, c_1 ihre gehörige Bestimmung erhalten.

Nimmt man aber aus (4. u. 3.), nämlich aus

$$y^2 = cx^2 + c_1 \quad \text{und} \quad y \cdot \partial y_x = cx,$$

die Werthe für y und ∂y_x, und substituirt man solche in die gegebene Differenzialgleichung (1.); so erhält man sogleich

$$c_1 = -\frac{Bc}{Ac+1},$$

so daß das allgemeine Integral der (1.) jetzt (aus 4.) durch nachstehende Gleichung

5) $$y^2 - cx^2 + \frac{Bc}{Ac+1} = 0.$$

ausgedrückt wird. *)

Beispiel 3. Ist zu integriren auf diesem Wege die Gleichung

1) $$\partial y_x^2 \cdot [(x^2+y^2+b^2)^2 - 4a^2 \cdot x^2] + 8a^2xy \cdot \partial y_x + (x^2+y^2+b^2)^2 - 4a^2y^2 = 0;$$

so differenzire man sie, und eliminire b. Dies geschieht am leichtesten, wenn man sie zuvor nach $x^2+y^2+b^2$ auflößt, und dann erst differenzirt. Man findet dann

2) $$\frac{a \cdot \partial^2 y_x}{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0,$$

welche integrirt, giebt

3) $$\frac{a \cdot \partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} - (x - C_1) = 0.$$

Und findet man hieraus ∂y_x in x ausgedrückt, und integrirt man noch einmal, so ergiebt sich

---

*) Auf diesem Wege hat Monge das Integral der Gleichung (1.), welche den Krümmungslinien der mit einem Mittelpunkte versehenen Flächen der 2ten Ordnung angehört, gefunden, und aus diesem Integral sehr elegante Bemerkungen über die Konstruktion dieser Krümmungslinien abgeleitet. (Vgl. d. 2te Heft des Journal de l'École polytechnique).

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2 = a^2,$$

während zwischen C_1 und C_2 noch die Gleichung

$$C_1^2+C_2^2 = a^2-b^2$$

sich ergiebt.

Anmerkung 1. *Monge*, dem man die ersten Grundzüge zu dieser Methode verdankt, wünscht daß man Tafeln für die algebraischen Integrale anlegen mögte. So hat er z. B. die Gleichung der 2ten Ordnung

I. $A\cdot y^2+2B\cdot xy+C\cdot x^2+2D\cdot y+2E\cdot x+1 = 0$

5 mal hinter einander differenziirt, und dann die 5 Konstanten A, B, C, D, E eliminirt, und ist dadurch zu der Gleichung der 5ten Ordnung gekommen.

II. $9(\partial^2 y_x)^2\cdot\partial^5 y_x-45\cdot\partial^2 y_x\cdot\partial^3 y_x\cdot\partial^4 y_x+40\cdot(\partial^3 y_x)^3 = 0,$

von welcher die (I.) das allgemeine Integral ist. *)

Besitzt man nun dieses Resultat in einer Tabelle, und ist nachgehends gegeben die Gleichung

1) $(1+\partial y_x^2)\cdot\partial^3 y_x = 3\partial y_x\cdot(\partial^2 y_x)^2,$

welche integrirt werden soll, so differenzire man sie zwei mal hinter einander, um zu erhalten

2) $(1+\partial y_x^2)^2\cdot\partial^4 y_x = 3\cdot(\partial^2 y_x)^3\cdot(1+5\partial y_x^2)$

3) $(1+\partial y_x^2)^3\cdot\partial^5 y_x = 15\partial y_x\cdot(\partial^2 y_x)^4\cdot(3+7\partial y_x^2).$

Nimmt man nun aus diesen 3 letztern Gleichungen $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$ und $\partial^5 y_x$, und substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung (II.), so wird solche identisch. Also ist (I.) das Integral der (I.), nur daß zwischen den 5 Konstanten A, B, C, D, E noch 2 Relationen (Gleichungen) statt finden müssen, weil die gegebene Differenzialgleichung (1.) nur von der 3ten Ordnung ist, ihr allgemeines Integral also nur 3 willkührliche Konstanten haben kann.

Um nun diese Relationen zu finden, muß man das Integral (I.) dreimal hintereinander differenziren, daraus die Werthe für

*) (Vgl. Correspondance sur l'École polytechnique tom. II. p. 51.).

∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ entwickeln, und diese Werthe in die gegebene Differenzialgleichung (1.) substituiren. Dann erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A \cdot y + B \cdot x + D = M, \qquad B \cdot y + C \cdot x + E = N$$

gesetzt worden ist, die Endgleichung

$$M \cdot (AN^2 - 2BMN + CM^2) \cdot \big(B \cdot (M^2 - N^2) + MN \cdot (C - A)\big) = 0.$$

Da diese Gleichung 1) für jeden Werth von x und y identisch werden, und 2) zu zwei (d. h. nicht zu mehr als zwei) Relationen führen soll, so kann man nur den dritten Faktor $= 0$ setzen, welcher

$$B = 0 \qquad \text{und} \qquad C = A$$

giebt. Das allgemeine Integral (I.) geht dadurch über in

$$4) \qquad A \cdot (y^2 + x^2) + 2D \cdot y + 2E \cdot x + 1 = 0,$$

und diese Gleichung mit den 3 willkührlichen Konstanten A, D, E ist daher das allgemeine Integral der (I.)

Dieses einzige Beispiel hebt aber die Art und Weise, wie solche Tabellen benützt werden sollen, um die hier im (§. 360.) vorgetragene Integrationsmethode bequemer durchführen zu können, hinlänglich hervor, weshalb wir uns darüber nicht weiter verbreiten wollen.

Anmerkung 2. Uebrigens machen wir noch darauf aufmerksam, daß wir schon (§. 274. d. V. Th. d. S.) gelehrt haben, wie man von einer Differenzialgleichung der 1sten Ordnung zu einer von der 2ten Ordnung übergehen, letztere aber dann integriren kann,, um wiederum eine Gleichung der 1sten Ordnung, mit einer willkührlichen Konstante zu erhalten; wie dann, wenn aus diesen beiden Gleichungen der 1sten Ordnung, ∂y_x eliminirt wird, und wenn dabei nicht y von selbst mit wegfällt, eine Urgleichung erhalten werde, welche als das Integral der gegebenen Differenzialgleichung angesehen werden müsse.

In so ferne es nun nicht gelingen sollte, bey obigem Verfahren des (§. 360.) von der Gleichung $\varphi = 0$ der n+mten Ordnung, eine Ur-Integral zu erhalten, während man jedoch ei-

nes ihrer rten allgemeinen Integrale zu finden im Stande ist, so müßte man dieses so eben für die Gleichung der 1ten Ordnung beschriebene Verfahren zu erweitern suchen, um auch hier von der gegebenen $F = 0$, wenn auch kein Ur-Integral, aber doch ein niedrigeres Integral zu erhalten.

Schluß-Anmerkung.

Auf diese wenigen Paragraphen läßt sich aber fast alles methodische Integriren gegebener Differenzialgleichungen, die nicht Parzialgleichungen sind, zurückführen. Man sieht daraus, daß man für die Integration der Differenzialgleichungen der 1ten Ordnung in endlicher Form nur sehr wenig, für dieselbe Integration der Differenzialgleichungen höherer Ordnungen, aber außer wenigen besondern Fällen, die wir mitgetheilt haben oder noch mittheilen werden, fast gar nichts hoffen darf, namentlich schon deshalb, weil in seltenen Ausnahmsfällen nur, solche Integrale in endlicher Form wirklich existiren. — Daher mag das nächste Kapitel nur noch die wenigen wichtigen besonderen Fälle näher betrachten.

Höhere Zahlenlehre.

Siebenzehntes Kapitel.

Betrachtung einiger besondern Fälle der Integration der Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen.

Erste Abtheilung.

Integration der lineären Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen.

Vorerinnerung.

Die lineären Differenzialgleichungen spielen in der Astronomie und in der Physik überhaupt eine so wichtige Rolle, daß ihre besondere Betrachtung dadurch allein schon gerechtfertigt seyn würde.

§. 361. Erklärung.

Jede Differenzialgleichung von der Form

$$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_n \cdot \partial^n y_x = X$$

heißt lineär, wenn $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, X$ Funktionen von x allein, oder konstant sind. Diese lineäre Gleichung nennen wir aber eine reduzirte, so oft $X = 0$ ist, eine vollständige dagegen, wenn X nicht Null, sondern eine Funktion von x oder konstant ist.

§. 362.

Bereits im (§. 349.) haben wir gesehen, daß für die lineäre Gleichung der nten Ordnung

1) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_n \cdot \partial^n y_x = X_x$,

in welcher $A_0, A_1, A_2, \cdots A_n$ nicht y, wohl aber x enthalten sollen, ein integrirender Faktor z gefunden werden könne, aus der Gleichung

$(\mathfrak{C})\cdots \quad A_0 \cdot z - \partial(A_1 \cdot z) + \partial^2(A_2 \cdot z) - \cdots \pm \partial^n(A_n \cdot z) = 0;$

und daß dann, wenn irgend ein, dieser Gleichung ($\mathfrak{C}$) genügender Werth von z gefunden ist, das Integral der (1.) folgendes seyn wird, nämlich:

2) $B_0 \cdot y + B_1 \cdot \partial y_x + B_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + B_{n-1} \cdot \partial^{n-1} y_x = \int X \cdot z \cdot dx + C$,

wo $B_0, B_1, B_2, \cdots B_{n-1}$ kein y, wohl aber x enthalten, und gegeben sind durch die Gleichungen

$$B_0 = A_1 \cdot z - \partial(A_2 \cdot z) + \partial^2(A_3 \cdot z) - \cdots \mp \partial^{n-1}(A_n \cdot z)$$

$$B_1 = A_2 \cdot z - \partial(A_3 \cdot z) + \cdots \pm \partial^{n-2}(A_n \cdot z)$$

$$B_2 = A_3 \cdot z - \partial(A_4 \cdot z) + \cdots \mp \partial^{n-3}(A_n \cdot z)$$

endlich

$$B_{n-1} = A_n \cdot z$$

u. s. w. f.

Dabei ist die Gleichung ($\mathfrak{C}$), welche zur Bestimmung des integrirenden Faktors dient, ebenfalls auf die lineäre Form

$(\mathfrak{d})\cdots \quad \mathfrak{A}_0 \cdot z + \mathfrak{A}_1 \cdot \partial z_x + \mathfrak{A}_2 \cdot \partial^2 z_x + \cdots + \mathfrak{A}_n \cdot \partial^n z_x = 0$

zu bringen, wo $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots \mathfrak{A}_n$ Funktionen von x oder konstant seyn werden. Dieselbe ist aber dann etwas einfacher als die gegebene (1.), in so ferne jene eine vollständige, diese aber eine reduzirte ist (vergl. §. 361.).

Kann also für jede reduzirte lineäre Gleichung ($\mathfrak{d}$) irgend ein genügender Werth gefunden werden, so kann auch jede vollständige lineäre Gleichung (1.) allgemein integrirt werden; und das allgemeine Integral der (1.) ist allemal wiederum lineär, abermals vollständig, aber von einer um 1 niedrigern Ordnung.

Findet man zu dieser Differenzialgleichung (2.) wiederum einen integrirenden Faktor z', so findet sich bald das allgemeine 2te Integral der (1.) von der Form

3) $D_0 \cdot y + D_1 \cdot \partial y_x + D_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + D_{n-2} \cdot \partial^{n-2} y_x =$
$= P_x + C \cdot Q_x + C_1,$

wo $D_0, D_1, D_2, \cdots D_{n-2}$ Funktionen von x seyn können.

Und fährt man so fort, so ergiebt sich zuletzt das Ur-Integral von der Form

4) $y = R_0 + C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 + \cdots + C_n \cdot R_n,$ *)

wo $R_0, R_1, R_2, \cdots R_n$ Funktionen von x sind, während $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$ die n willkührlichen Konstanten vorstellen.

Dabei steht diesem Integriren kein anderes Hinderniß entgegen, als das jedesmalige Auffinden eines, den Gleichungen von der Form (ϑ) genügenden Werthes von z.

§. 363.

Da man jedoch durch das vorhergehende bereits die Form des allgemeinen Ur-Integrals der gegebenen Gleichung (§. 362. N. 1.) kennt, wie solche in (§. 362. N. 4.) ausgesprochen worden ist, so kann man nun das Integral (§. 362. N. 4.) auch dadurch suchen, daß man es der Form nach annimmt, nämlich

1) $y = R_0 + C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + \cdots + C_n \cdot R_n;$

diese Form statt y, ihre Ableitungen statt $\partial y_x, \partial^2 y_x$, 2c. 2c. in die gegebene Differenzialgleichung

2) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_n \cdot \partial^n y_x = X$

substituirt, nachgehends aber die unbekannten Funktionen $R_0, R_1, R_2, \cdots R_n$ so bestimmt, daß diese neue Gleichung identisch wird, so daß die n willkührlichen Konstanten von selber wegfallen.

---

*) Die letzte Gleichung hat nämlich die Form

$$M_0 \cdot y = P_x + C_1 \cdot Q_x + \cdots + C_{n-1} \cdot S_x + C_n$$

dividirt man nun durch M_0, welches eine Funktion von x seyn wird oder konstant, so erhält man die obige Form (4.).

Geschieht dies aber, so findet sich, daß diese Konstanten nur dann von selbst sich wegheben, wenn ihre Koeffizienten einzeln der 0 gleich gesetzt werden. Dadurch erhält man zur Bestimmung der n Funktionen $R_1, R_2, \cdots R_n$ die n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_0 \cdot R_1 + A_1 \cdot \partial R_1 + A_2 \cdot \partial^2 R_1 + \cdots + A_n \cdot \partial^n R_1 &= 0 \\ A_0 \cdot R_2 + A_1 \cdot \partial R_2 + A_2 \cdot \partial^2 R_2 + \cdots + A_n \cdot \partial^n R_2 &= 0 \\ \text{u. s. w. f.} \\ A_0 \cdot R_n + A_1 \cdot \partial R_n + A_2 \cdot \partial^2 R_n + \cdots + A_n \cdot \partial^n R_n &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (3.)$$

während R_0 gegeben ist durch die Gleichung

$$4) \quad A_0 \cdot R_0 + A_1 \cdot \partial R_0 + A_2 \cdot \partial^2 R_0 + \cdots + A_n \cdot \partial^n R_0 = X;$$

in welchen Gleichungen alle ∂ sich auf x beziehen.

Die Gleichung (4.) ist aber die gegebene Gleichung (2.), nur R_0 statt y gesetzt; während die Gleichungen (3.) allemal wiederum genau die gegebene Gleichung (2.) sind, nur Null statt X gesetzt. Kann man also eine Anzahl n, der Gleichung (2.) für $X = 0$ genügender Werthe von y finden, welche beziehlich statt $R_1, R_2, R_3, \cdots R_n$ genommen werden, und kann man zuletzt noch einen genügenden Werth der Gleichung (2.) finden, während X nicht Null sondern X ist, und welcher statt R_0 genommen werden muß, so hat man in (1.) das allgemeine Ur-Integral der Gleichung (2.) der nten Ordnung.

A. Integration der reduzirten lineären Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

§. 364.

Betrachten wir aber zunächst den besondern Fall, in welchem die gegebene lineäre Differenzialgleichung eine reduzirte ist, und nehmen wir der größern Bequemlichkeit wegen wiederum den besondern Fall, wo $n = 3$ ist; so daß man also die Gleichung hat

$$1) \quad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \partial^3 y_x = 0. \; *)$$

---

*) Hier ist der Koeffizient der höchsten Ableitung $= 1$. So kann man jede lineäre Gleichung umformen, weil, wenn dieser Koeffizient

Setzt man hier nach (§. 358. XI.) $e^{\int t \cdot dx}$ statt y, so erhält man die Gleichung der 2ten Ordnung

$$2)\quad \partial^2 t_x + (3t + A_2)\cdot \partial t_x + (t^3 + A_2 \cdot t^2 + A_1 \cdot t + A_0) = 0,$$

welche nun noch integrirt werden muß, sowohl wenn A_2, A_1, A_0 Funktionen von x, oder auch wenn alle diese Koeffizienten nach x konstant sind.

Dieser Gleichung (2.) genügen aber, wie man sieht, so oft A_0, A_1, A_2 auch nach x konstant sind, alle konstanten Werthe von t, welche der Gleichung

$$3)\quad t^3 + A_2 \cdot t^2 + A_1 \cdot t + A_0 = 0$$

entsprechen, weil für jeden konstanten Werth von t, $\partial t_x = 0$, $\partial^2 t_x = 0$ ist. Setzen wir also A_0, A_1, A_2 auch nach x konstant voraus.

I. Hat dann die Gleichung (3.) für t drei verschiedene Wurzelwerthe m_1, m_2 und m_3, so hat man für $e^{\int t \cdot dx}$ d. h. für y, 3 genügende Werthe

$$e^{m_1 \cdot x};\quad e^{m_2 \cdot x} \text{ und } e^{m_3 \cdot x},$$

welche beziehlich statt R_1, R_2 und R_3 gesetzt werden können, während für $X = 0$ auch $R_0 = 0$ wird; und man hat daher nach (§. 363.)

$$4)\quad y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$$

als das allgemeine Ur-Integral der lineären Gleichung (1.), mit den 3 willkührlichen Konstanten C_1, C_2, C_3.

II. Sind aber von den 3 Wurzelwerthen der Gleichung (3.) zweie einander gleich, etwa $m_1 = m_2$, so wird die Gleichung (2.) die Form annehmen

---

nicht $= 1$ wäre, man nur durch ihn die ganze Gleichung wegdividiren könnte, um in der neuen Gleichung diesen Koeffizienten $= 1$ zu haben.

5) $\partial^2 t_x + (3t - 2m_1 - m_3)\cdot\partial t_x + (t - m_1)^2\cdot(t - m_3) = 0$; *)

und da man jetzt einstweilen nur zwei Werthe von t kennt, nämlich

$$t = m_1 \quad \text{und} \quad t = m_3,$$

welche der Gleichung (5.) genügen, so muß man noch einen dritten der Gleichung (5.) genügenden Werth von t dazu finden.

Setzt man aber, um einen neuen Veränderlichen u einzuführen,

6) $t - m_1 = u \quad \text{also} \quad t = u + m_1,$

so geht die Gleichung (5.) in die folgende

7) $\partial^2 u_x + (u + m_1 - m_3)\cdot\partial u_x + u^2\cdot(u + m_1 - m_3) = 0$

über, und dieser Gleichung genügen die 3 Werthe von u, nämlich

$$u = 0; \quad u = m_3 - m_1; \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{x}. \; **)$$

---

*) Es ist nämlich allemal, wenn m_1, m_2, m_3 die 3 Werthe von t der Gleichung (3.) sind,

$$A_2 = -(m_1 + m_2 + m_3);$$
$$A_1 = m_1\cdot m_2 + m_1\cdot m_3 + m_2\cdot m_3;$$
und $$A_0 = -m_1\cdot m_2\cdot m_3.$$

**) Betrachtet man bloß eine lineäre Differenzialgleichung der 2ten Ordnung

1) $A_0\cdot y + A_1\cdot\partial y_x + \partial^2 y_x = 0,$

so geht sie für $y = e^{\int t\cdot dx}$ in

2) $(A_0 + A_1\cdot t + t^2) + \partial t_x = 0$

über. — Sind nun A_0 und A_1 konstant (nach x) und zugleich die beiden Werthe von t aus der Gleichung

3) $A_0 + A_1\cdot t + t^2 = 0$

einander gleich und $= m_1$, so wird die Gleichung (2.) nun

4) $(t - m_1)^2 + \partial t_x = 0$

oder

5) $(t - m_1)^2\cdot\partial x + \partial t = 0;$

und hier sind die Variablen sogleich getrennt, so daß man

$$\partial x_t = \frac{1}{(t - m_1)^2}$$

Daher genügen der Gleichung (5.) die 3 Werthe von t, nämlich

$$t = m_1, \quad t = m_3 \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{x} + m_1.$$

Und deshalb hat man (weil man für $\int t \cdot dx$ die 3 Werthe

$$m_1 \cdot x, \quad m_3 \cdot x \quad \text{und} \quad m_1 \cdot x + \log x,$$

demnach für y die 3 Werthe

$$R_1 = e^{m_1 \cdot x}, \quad R_3 = e^{m_3 \cdot x} \quad \text{und} \quad R_2 = e^{m_1 \cdot x + \log x}$$ *)

erhält) das allgemeine Ur-Integral der (1.) jetzt so

$$8) \quad y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_1 \cdot x + \log x} + C_3 \cdot e^{m_3 x},$$

oder

$$9) \quad y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$$ **)

---

oder $$\partial x_u = -\frac{1}{u^2}$$

erhält, woraus $$x = -\int \frac{1}{u^2} \cdot du = \frac{1}{u},$$

also $u = \frac{1}{x}$ hervorgeht. Die Betrachtung des einfachern Falles führt also direkt zu diesem Resultate.

*) Da R_1, R_2, R_3 bloß besondere genügende Werthe seyn können, so hat man hier überall nicht allgemeine, sondern nur die zunächst liegenden besonderen Integrale genommen.

**) Man kann dieses Resultat auch dadurch erhalten, daß man anfänglich $m_2 = m_1 + h$, also $e^{m_2 \cdot x} = e^{m_1 \cdot x} \cdot e^{hx}$, oder

$$\left(\text{weil} \quad e^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{2!} + \cdots \quad \text{ist}\right)$$

$$e^{m_2 \cdot x} = e^{m_1 \cdot x} \cdot \left(1 + hx + \frac{h^2 \cdot x^2}{2!} + \cdots\right)$$

setzt, dann nach (I.) das allgemeine Ur-Integral

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot (1 + hx + \cdots) + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$$

nimmt, also daß

$$y = e^{m_1 \cdot x} \cdot [(C_1 + C_2) + (C_2 \cdot h) \cdot x + \cdots] + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$$
$$= e^{m_1 \cdot x} \cdot [\quad C \quad + \quad C' \cdot x + \cdots] + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x}$$

wird, zuletzt aber 0 statt h substituirt.

III. Sind endlich alle 3 Werthe von t der Gleichung (3.) einander gleich, so nimmt die Gleichung (2.) die Form

10) $\partial^2 t_x + 3(t - m_1)\cdot\partial t_x + (t-m_1)^3 = 0$ an.

Von dieser Gleichung kennt man nun erst einen einzigen genügenden Werth von t, nämlich $t = m_1$. Um noch zwei andere zu finden, setze man

$$t - m_1 = u, \quad \text{also} \quad t = u + m_1;$$

und die Gleichung (10.) geht sogleich über in

11) $\partial^2 u_x + 3u\cdot\partial u_x + u^3 = 0.$

Da nun dieser Gleichung, wie man leicht bemerkt, die 3 Werthe von u genügen, nämlich

$$u = 0, \quad u = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad u = \frac{2}{x},$$

so genügen der Gleichung (10.) die 3 Werthe von t, nämlich

$$t = m_1, \quad t = \frac{1}{x} + m_1 \quad \text{und} \quad t = \frac{2}{x} + m_1.$$

Also genügen der Gleichung (1.) die 3 Werthe von y, nämlich

$$R_1 = e^{m_1 \cdot x}, \quad R_2 = e^{m_1 \cdot x + \log x} \quad \text{und} \quad R_3 = e^{m_1 \cdot x + 2\log x}.$$

Demnach ist nun das allgemeine Integral der Gleichung (1.), weil wegen $X = 0$ immer $R_0 = 0$ gefunden wird,

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_1 \cdot x + \log x} + C_3 \cdot e^{m_1 \cdot x + 2\log x}$$

d. h. $y = e^{m_1 \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2)$ *).

§. 365.

Sind also von der lineären Gleichung der nten Ordnung

---

*) Auch dieses Resultat konnte man im Voraus wissen, wenn man zuerst $m_2 = m_1 + h$ und $m_3 = m_1 + 2h$ setzte, das allgemeine Integral in (I.) demgemäß umformte, dann h und h^2 mit in die Konstante hineinnahm, und zuletzt erst 0 statt h setzte. — Man konnte auch von dem Falle (II.) ausgehen, wo schon $m_1 = m_2$ war, dann $m_3 = m_1 + h$ setzen, das allgemeine Integral in (II.) demgemäß umformen, dann h in die Konstante mit aufnehmen, zuletzt aber wiederum 0 statt h setzen.

1) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + \partial^n y_x = 0,$

deren Glied zur Rechten Null ist, die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2 \cdots A_{n-1}$ alle (auch nach x) konstant, so darf man nur

$y = e^{mx}$, also $\partial y_x = e^{mx} \cdot m$, $\partial^2 y_x = e^{mx} \cdot m^2$, 2c. 2c.

setzen, aus der entstehenden Gleichung

2) $A_0 + A_1 \cdot m + A_2 \cdot m^2 + \cdots + m^n = 0$ oder $f_m = 0$

die n Wurzelwerthe von m finden, und dann hat man,

I. wenn diese n Wurzelwerthe alle verschieden sind, und durch $m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots m_n$ vorgestellt werden, die Gleichung

3) $y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + C_3 \cdot e^{m_3 \cdot x} + \cdots + C_n \cdot e^{m_n \cdot x}$

als das allgemeine Integral der (1.) mit den n willkührlichen Konstanten $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$.

II. Hat aber die Gleichung (2.) r gleiche Wurzelwerthe, alle $= m_1$, so ist das allgemeine Integral der (1.) jetzt

4) $y = e^{m_1 \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \cdots C_r \cdot x^{r-1}) + C_{r+1} \cdot e^{m_r \cdot x} + \cdots + C_n \cdot e^{m_n \cdot x}$

III. Sind von den n—r übrigen Wurzelwerthen der Gleichung (2.), noch eine Anzahl s einander gleich und $= m_\mu$, so ist das allgemeine Integral der (1.) jetzt

5) $y = e^{m_1 \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \cdots + C_r \cdot x^{r-1}) + C_{r+1} \cdot e^{m_r \cdot x} + \cdots + e^{m_\mu \cdot x} (C_\mu + C_{\mu+1} \cdot x + \cdots + C_{\mu+s-1} \cdot x^{s-1}) + \cdots + C_n \cdot e^{m_n \cdot x}.$

IV. Und so oft noch einige der Wurzelwerthe von m in (2.) einander gleich sind, so oft entstehen noch mehr Glieder von der Form $e^{m \cdot x} \cdot (C + C' \cdot x + C'' \cdot x^2 + \cdots)$ in dem allgemeinen Ur-Integral der Gleichung (1.). *)

---

*) Man kann diese letztere Resultate in (II.—IV.) auch dadurch finden, daß man einen neuen Veränderlichen Y einführt durch die Gleichung

$$y = e^{m \cdot x} \cdot Y + U,$$

wo m den gleichen Wurzelwerth und U die Summe der schon gefunde-

V. Wenn man will, so kann man alle diese verschiedenen Fälle der (Nro. Nro. II.—IV.) in eine einzige Formel zusammenfassen, nämlich in die Gleichung

$$6) \qquad y = \Sigma\Big[\partial^{\alpha-1}(e^{m\cdot x}\cdot\varphi_m)_m\Big]_{m_{\alpha'}};$$

wenn hier die Bezeichnung des (§. 204. d. V. Th. d. S.) verstanden wird; wenn α die Anzahl der gleichen Wurzelwerthe $m_{\alpha'}$ der Gleichung (2.) oder $f_m = 0$ vorstellt (so daß $\alpha = 1$ ist, so oft $m_{\alpha'}$ nur einmal erscheint, wo dann $\alpha - 1 = 0$ und $\partial^{\alpha-1}(e^{m\cdot x}\cdot\varphi_m)_m$ mit $e^{m\cdot x}\cdot\varphi_m$ selber identisch ist); wenn ferner statt $[\varphi_m]_{m_{\alpha'}}$; $[\partial\varphi_m]_{m_{\alpha'}}$; $[\partial^2\varphi_m]_{m_{\alpha'}}$; ꝛc. ꝛc. ganz beliebige Konstanten C_1, C_2, C_3, ꝛc. ꝛc. gesetzt werden (also auch wenn φ_m eine Funktion von m mit n willkührlicher Konstanten vorstellt, oder auch wenn für φ_m eine ganze Funktion von m vom nten Grade mit n willkührlichen Koeffizienten gesetzt wird); wenn endlich das vorgesetzte Σ anzeigt, daß die Summe aller der einzelnen Theile genommen werden soll, welche der Ausdruck hinter dem Σ giebt, so oft statt $m_{\alpha'}$ nach und nach jeder der gleichen oder ungleichen Wurzelwerthe der Gleichung (2.) oder $f_m = 0$, einer nach dem andern, gesetzt wird.

Man erkennt die Richtigkeit der Formel (6.) wenn man zusieht, was sie liefert in den verschiedenen Fällen (I.—IV.), und wenn man fin-

---

nen übrigen Theile von y vorstellt. Die Gleichung, welche man dann zur Bestimmung von Y erhält, kann aber nun allemal nach dem Verfahren des (§. 276. d. V. Th. d. S.) integrirt werden; sie giebt das Integral immer in endlicher Form und zwar in der Form

$$Y = a + b\cdot x + c\cdot x^2 + \cdots .$$

Man muß nur, um die Gleichung für Y in ihrer einfachsten Gestalt zu erhalten, den Satz zu Hilfe nehmen, daß wenn eine höhere Gleichung

$$f_m = 0,$$

r gleiche Wurzelwerthe hat, derselbe Wurzelwerth dann auch die $r-1$ Ableitungen ∂f_m, $\partial^2 f_m$, $\partial^3 f_m$, $\cdots$ $\partial^{r-1} f_m$, der Null gleich machen müsse.

det, daß ihre Resultate in jedem Falle mit den für denselben Fall in (I.) oder (II.), in (III.) oder (IV.) wirklich gefundenen, zusammenfällt.

Man kann sich aber auch leicht direkt davon überzeugen: 1) daß in der Formel (6.) n willkührliche Konstanten enthalten sind, 2) daß die Formel (6.), der Gleichung (1.) unabhängig von den besondern Werthen dieser Konstanten genügt. Das erstere fällt ohnehin in die Augen. Hinsichtlich der andern Behauptung differenziire man die Formel (6.) hinter einander nach x, um nach und nach

$$\partial y_{x'}\ \partial^2 y_{x'}\ \cdots\ \partial^r y_{x'}\ \cdots\ \partial^n y_x$$

zu erhalten, so findet sich, weil es einerlei ist, ob man zuerst nach m und dann nach x, oder zuerst nach x und dann nach m differenziirt, aus (6.) sogleich

$$7)\qquad \partial^r y_x = \Sigma\left[\partial^{a-1}\left(e^{m\cdot x}\cdot m^r\cdot\varphi_m\right)_m\right]_{m_{a'}};$$

wo r jeden der Werthe 0, 1, 2, 3, ··· n vorstellen kann. Substituirt man aber diese Werthe aus (6.) und (7.) statt

$$y_{x'}\ \partial y_{x'}\ \partial^2 y_{x'}\ \partial^3 y_{x'}\ \cdots\ \partial^n y_x$$

in die Gleichung (1.), so erhält man für den Ausdruck in (1.) zur Linken, jetzt

$$8)\qquad \Sigma\left[\partial^{a-1}\left(e^{m\cdot x}\cdot\varphi_m\left(A_0+A_1\cdot m+A_2\cdot m^2+\cdots+m^n\right)\right)_m\right]_{m_{a'}}.$$

Weil aber, nach der Voraussetzung, in

$$A_0+A_1\cdot m+A_2\cdot m^2+A_3\cdot m^3+\cdots+m^n$$

der Faktor $m-m_{a'}$ gerade a mal vorkommen soll, so ist nach (§. 99. d. IV. d. S.), d. h. nach der Formel

$$\partial^{a-1}\left[\left(F_m\cdot(m-m_{a'})^a\right)_m\right]_{m_{a'}}=0,$$

jeder der unter dem Zeichen Σ begriffenen, von den verschiedenen Wurzelwerthen $m_{a'}$ herrührenden Theile in (8.) für sich $=0$, also auch der ganze Ausdruck (8.) identisch $=0$. — Also genügt der Werth von y in (6.) jedesmal der Gleichung (1.), auch hat er n willkührliche Konstanten; mithin ist er das allgemeine Ur-Integral der (1.).

Aber gerade auf demselben Wege überzeugt man sich, daß auch

$$9)\qquad y=\Sigma\frac{1}{(m-1)!}\cdot\left[\partial^{a-1}\left((m-m_{a'})^a\cdot\frac{\varphi_m\cdot e^{m\cdot x}}{f_m}\right)_m\right]_{m_{a'}}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1.) ist, wenn

10) f_m den Ausdruck $A_0+A_1\cdot m+A_2\cdot m^2+\cdots+m^n$ in (2.) vorstellt, so daß die Gleichung (2.) auch durch

$$f_m = 0$$

ausgedrückt ist.

§. 366.

Obgleich die Rechnung genau dieselbe bleibt, es mögen die Wurzelwerthe von m der Gleichung (2.) oder $f_m = 0$, reel oder imaginär seyn, so pflegt man doch im letztern Falle für die Anwendung folgende Umformung eintreten zu lassen. — Da nämlich die imaginären Wurzelwerthe immer paarweise vorkommen, so daß, wenn

$$m_1 = \alpha+\beta\cdot i \quad \text{ist, dann} \quad m_2 = \alpha-\beta\cdot i$$

genommen werden kann, unter i eine der Formen der $\sqrt{-1}$ verstanden; so hat man in diesem Falle

$$C_1\cdot e^{m_1\cdot x}+C_2\cdot e^{m_2\cdot x} = C_1\cdot e^{\alpha x}\cdot e^{\beta xi}+C_2\cdot e^{\alpha x}\cdot e^{-\beta xi}.$$

Weil jedoch

$$e^{\pm\beta xi} = Cos\ \beta x \pm i\cdot Sin\ \beta x$$

ist, so geben vorstehende beide Glieder jetzt

$$e^{\alpha x}\cdot\big((C_1+C_2)\cdot Cos\ \beta x+(C_1-C_2)\cdot i\cdot Sin\ \beta x\big)$$

oder $e^{\alpha x}\cdot(E_1\cdot Cos\ \beta x+E_2\cdot Sin\ \beta x)$,

wenn C_1+C_2 durch E_1, und $(C_1-C_2)\cdot i$ durch E_2 bezeichnet wird, so daß E_1 und E_2 an die Stelle der willkührlichen Konstanten treten. — Und giebt man diesen Konstanten E_1 und E_2 noch die Form

$$E_1 = p\cdot Sin\ q, \qquad E_2 = p\cdot Cos\ q$$

oder $$E_1 = p\cdot Cos\ q, \qquad E_2 = -p\cdot Sin\ q,$$

so erhält man jene beiden Glieder des allgemeinen Integrals jetzt in der Form

$$p\cdot e^{\alpha x}\cdot Sin\ (\beta x+q) \text{ oder } p\cdot e^{\alpha x}\cdot Cos\ (\beta x+q)$$

vereinigt, wo p und q die beiden willkührlichen Konstanten vorstellen.

§. 367.

Sind die gleichen Wurzelwerthe imaginär, so müssen zwei Wurzelwerthe die Form

$$m_1 = m_2 = \alpha + \beta \cdot i,$$

die beiden andern aber dann die Form

$$m_3 = m_4 = \alpha - \beta \cdot i$$

haben; und die 4 entsprechenden Glieder des allgemeinen Integrals der (1.) lassen sich dann sogleich zusammenfassen in den Ausdruck

$$e^{\alpha x} \cdot \left((F_1 + F_2 \cdot x) \cdot Cos\ \beta x + (F_3 + F_4 \cdot x) \cdot Sin\ \beta x \right),$$

wo F_1, F_2, F_3 und F_4 die 4 willkührlichen Konstanten sind.

§. 368.

Ist namentlich die gegebene lineäre und reduzirte Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

bloß von der zweiten Ordnung, so hat man, wenn der Kürze wegen $-\frac{1}{2}A_1$ durch a, und $\sqrt{\frac{1}{4}A_1^2 - A_0}$ durch b bezeichnet wird,

$$2) \qquad y = e^{ax} \cdot (C_1 \cdot e^{bx} + C_2 \cdot e^{-bx});$$

und diese Form des allgemeinen Ur-Integrals geht in

$$3) \quad y = e^{ax} \cdot (E_1 \cdot Cos\ \beta x + E_2 \cdot Sin\ \beta x)$$
$$= p \cdot e^{ax} \cdot Sin\ (\beta x + q) = c \cdot e^{ax} \cdot Cos\ (\beta x + c_1)$$

über, so oft b imaginär und von der Form βi seyn sollte, wo dann $\beta = \sqrt{A_0 - \frac{1}{4}A_1^2}$ ist.

Ist endlich $b = \beta = 0$, so ist das allgemeine Ur-Integral der (1.) das nachstehende, nämlich:

$$4) \qquad y = e^{ax} \cdot (C_1 + C_2 x). \ *)$$

---

*) Führt man die Werthe, welche y und ∂y_x für $x = 0$ annehmen, und welche durch E_1 und E_2 bezeichnet seyn mögen, als die

B. Integrations-Versuche der reduzirten lineären Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten; und zwar nur von der zweiten Ordnung.

§. 369.

I. Sind aber in derselben lineären Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

die Koeffizienten A_0, A_1 nicht nach x konstant, sondern sind sie wirklich Funktionen von x, so erhält man, wenn der neue Veränderliche t durch die Gleichung

$$2) \qquad y = e^{\int t \cdot dx}$$

eingeführt wird, sogleich die Gleichung vom 1ten Grade

$$3) \qquad \partial t_x + (t^2 + A_1 \cdot t + A_0) = 0,$$

von deren Integration nun alles abhängt.

Man hat nun, um die Integration der (3.) zu bewerkstelligen, zwei neue Veränderliche eingeführt, nach (§. 357.) einstweilen durch die Gleichung

---

willkührlichen Konstanten ein, so hat man aus

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x}; \quad \partial y_x = m_1 \cdot C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + m_2 \cdot C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x};$$

für $x = 0$

$$E_1 = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad E_2 = m_1 \cdot C_1 + m_2 \cdot C_2.$$

Daraus folgt dann

$$C_1 = \frac{E_1 \cdot m_2 - E_2}{m_2 - m_1} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{E_2 - E_1 \cdot m_1}{m_2 - m_1};$$

also

$$y = \frac{E_1 \cdot (m_2 \cdot e^{m_1 \cdot x} - m_1 \cdot e^{m_2 \cdot x}) - E_2 \cdot (e^{m_1 \cdot x} - e^{m_2 \cdot x})}{m_2 - m_1}$$

Dieser Ausdruck nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an, so oft $m_1 = m_2$ genommen wird; der für $\frac{0}{0}$ nach (§§. 131—133. d. IV. Th. d. S.) gefundene Werth (indem man nämlich Zähler und Nenner nach m_2 differenziirt, und die Resultate wieder dividirt) giebt aber nun

$$y = E_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + (E_2 - E_1 \cdot m_1) \cdot x \cdot e^{m_1 \cdot x},$$

welches die für diesen Fall richtige Form ist.

4) $t = V \cdot s;$

so daß die Gleichung (3.) wird

5) $V \cdot \partial s + s \cdot \partial V + (V^2 \cdot s^2 + A_1 \cdot V \cdot s + A_0) \cdot \partial x = 0$

oder 6) $V \cdot \partial s + \left(V^2 \cdot s^2 + \left(A_1 \cdot V + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot s + A_0\right) \cdot \partial x = 0.$

Man kann nun, in der Absicht, in dieser Gleichung (6.) die Veränderlichen zu trennen, die zweite Gleichung, welche V und s bestimmt, so nehmen, daß

7) $A_1 \cdot V + \frac{\partial V}{\partial x} = a \cdot V^2$

wird, wo a eine willkührliche Konstante ist. Wenn nur dann auch

S) $A_0 = bV^2$

seyn wollte, wo b ebenfalls konstant, so würde man sogleich aus (6.) diese

9) $\frac{\partial s}{s^2 + as + b} + V \cdot \partial x = 0$

erhalten, welche nun integrirt werden könnte. — Damit aber die Gleichungen (7. und 8.) zu gleicher Zeit statt finden, muß zwischen A_1 und A_0 eine Abhängigkeit existiren, nämlich die Gleichung

10) $\left(A_1 + \frac{\partial (A_0)_x}{2A_0}\right) = \frac{a^2}{b} \cdot A_0,$

welche aus den Gleichungen (7. und 8.) hervorgeht, wenn man aus ihnen jede Spur von V eliminirt.

Ist diese Gleichung von den gegebenen Koeffizienten A_0 und A_1 nicht erfüllt, so kann die Gleichung (6.) auf die Form (9.) nicht gebracht werden.

Bei einem andern Versuche hat man lieber zu der Gleichung (4.) statt der Gleichung (7.) diese andere

11) $\partial V + A_1 \cdot V \cdot \partial x = 0$ oder $V = C \cdot e^{-\int A_1 \cdot dx}$

hinzu genommen. Die Gleichung (5.) geht dann über in

12) $\partial s + \left(V \cdot s^2 + \frac{A_0}{V}\right) \cdot \partial x = 0;$

und man kann nun versuchen, diese weiter zu behandeln, um wo möglich ein Integral von ihr zu erhalten.

II. Statt $t = V \cdot s$ zu setzen, hat man auch

$$t = \frac{U + V \cdot s}{S + T \cdot s}$$

gesetzt, und nun versucht, die Funktionen U, V, S, T so zu bestimmen, daß die neue Differenzialgleichung der 1sten Ordnung in s, in welche die (3.) übergeht, leicht zu integriren seyn möchte.

III. Man hat aber auch in der gegebenen Differenzialgleichung selbst, nämlich in

1) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

sogleich 2 neue Veränderliche R und r eingeführt, immer nach (§. 357.), dadurch, daß man nicht erst $y = e^{\int t \cdot dx}$, sondern sogleich

2) $$y = R \cdot r$$

setzte. Die Gleichung (1.) geht dadurch über in

3) $$R \cdot \partial^2 r_x + (2\partial R_x + A_1 \cdot R) \cdot \partial r_x + \\ + (\partial^2 R_x + A_1 \cdot \partial R_x + A_0 \cdot R) \cdot r = 0.$$

Nimmt man nun noch

4) $$2\partial R_x + A_1 \cdot R = 0 \quad \text{d. h.} \quad R = e^{-\frac{1}{2}\int A_1 \cdot dx},$$

so reduzirt sich die Gleichung (3.) auf

5) $$\partial^2 r_x + (A_0 - \tfrac{1}{4} A_1^2 - \tfrac{1}{2} \partial (A_1)_x) \cdot r = 0$$

d. h. auf

6) $$\partial^2 r_x + N \cdot r = 0,$$

wo N eine bekannte und gegebene Funktion von x ist, nämlich

7) $$N = A_0 - \tfrac{1}{4} A_1^2 - \tfrac{1}{2} \partial (A_1)_x.$$

Setzt man nun, um diese Gleichung (6.) der 2ten Ordnung, da sie wiederum lineär ist, zu integriren

8) $$r = e^{\int t \cdot dx},$$

so geht sie über in

9) $$\partial t_x + (t^2 + N) = 0,$$

welche nun noch integrirt werden müßte.

Man könnte aber auch, statt die Gleichung (4.) zur Bestimmung von R zu wählen, lieber statt R einen besondern Werth von y setzen (wenn man nämlich einen solchen hat, welcher der Gleichung (1.) genügt). Dann reduzirt sich die Gleichung (3.) auf

10) $$R \cdot \partial^2 r_x + (2\partial R_x + A_1 \cdot R) \cdot \partial r_x = 0.$$

Setzt man nun den bekannten Ausdruck

11) $$2\partial R_x + A_1 \cdot R = M,$$

und führt man noch einen neuen Veränderlichen r′ ein durch die Gleichung

12) $$\partial r_x = r',$$

so findet sich

$$\partial r'_x + M \cdot r' = 0; \qquad r' = C_1 \cdot e^{-\int M \cdot dx};$$

$$r = C_1 \cdot \int e^{-\int M \cdot dx} \cdot dx + C_2,$$

woraus dann $y = R \cdot r$ sogleich als das allgemeine Integral mit den beiden willkührlichen Konstanten C_1 und C_2 hervorgeht.

Kennt man also von der Gleichung (1.) einen einzigen besondern und genügenden Werth R von y, so kann man auf diesem Wege das vollständige allgemeine Ur-Integral der Gleichung (1.) finden, auch wenn die Koeffizienten A_1 und A_0 Funktionen von x sind.

IV. Man hat auch in die gegebene lineäre Gleichung

1) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

zwei neue Veränderliche R und r durch die Gleichung

2) $$y = e^{\int R \cdot dx} \cdot r$$

eingeführt, und dadurch die (1.) in die folgende umgewandelt, nämlich in

3) $$\partial^2 r_x + (2R + A_1) \cdot \partial r_x + (\partial R_x + R^2 + A_1 \cdot R + A_0) \cdot r = 0.$$

Macht man nun

4) $$2R + A_1 = 0,$$

so erhält man wieder

$$5) \qquad \partial^2 r_x + N \cdot r = 0$$

zu integriren.

Sucht man aber lieber R aus

$$6) \qquad \partial R_x + R^2 + A_1 \cdot R + A_0 = 0$$

zu bestimmen, so erhält man noch

$$7) \qquad \partial^2 r_x + (2R + A_1) \cdot \partial r_x = 0$$

zu integriren, welcher Gleichung jedoch durch $r = Const.$ genügt wird. Die Gleichung (6.) ist aber zur Bestimmung von R genau dieselbe, welche in (I. 3.) zur Bestimmung von t gefunden worden ist, so daß dieser Versuch zu keinem andern Resultat geführt hat, als zu demselben in (I.) schon erhaltenen. — Endlich ist das Verfahren dieser Nummer (IV.) auch von dem Verfahren der Nummer (III.), genau genommen in nichts verschieden, als daß hier $e^{\int R \cdot dx}$ steht, wo dort R. — Setzte man also in den dort in (III.) zur Bestimmung von R eingeführten Gleichungen wiederum $R = e^{\int R' \cdot dx}$, so würde man dieselben Gleichungen für R′ haben, wie sie hier für R sich ergeben.

V. Man hat auch, um die lineäre Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

zu integriren, wenn A_0 und A_1 Funktionen von x sind, die Form des allgemeinen ersten Integrals vorausgesetzt, und zwar so

$$2) \qquad r \cdot \partial y_x + R \cdot y = C,$$

wo r und R gesuchte Funktionen von x sind, während C die willkührliche Konstante vorstellen soll. Differenziirt man aber diese (2.), und vergleicht man sie mit der (1.), so findet man zur Bestimmung von r und R die beiden Gleichungen

$$3) \quad A_1 = \frac{\partial r_x}{r} + \frac{R}{r} \quad \text{und} \quad 4) \quad A_0 = \frac{\partial R_x}{r}.$$

Eliminirt man aus beiden R und ∂R_x (dazu ist es aber nöthig, daß man zuvor die Gleichung (3.) nach allem x differenziire), so

erhält man zur Bestimmung von r die Gleichung

$$5) \quad \partial^2 r_x - A_1 \cdot \partial r_x + (A_0 - \partial(A_1)_x) \cdot r = 0,$$

aus welcher Gleichung nun ein genügender Werth r genommen werden müßte, um dann aus (3.) sogleich R dazu gefunden zu haben.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (3. und 4.) lieber r und ∂r_x (zu welchem Ende die Gleichung (4.) vorher noch einmal differenziirt werden muß), so ergiebt sich zur Bestimmung von R die Gleichung

$$6) \quad \partial^2 R_x - \left(A_1 + \frac{\partial(A_0)_x}{A_0}\right) \cdot \partial R_x + A_0 \cdot R = 0,$$

aus welcher Gleichung ein genügender Werth von R genommen werden muß, um aus (4.) sogleich r dazu zu haben.

VI. Wenn man die Bemerkung gemacht hat, daß

$$1) \quad \frac{\partial^2 y}{y} = \partial\left(\frac{\partial y}{y}\right) + \frac{\partial y^2}{y^2},$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach x bedeuten; so kann man die gegebene Gleichung

$$2) \quad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

auf die Form bringen

$$3) \quad A_0 + A_1 \cdot \left(\frac{\partial y}{y}\right) + \left(\frac{\partial y}{y}\right)^2 + \partial\left(\frac{\partial y}{y}\right) = 0,$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach x vorstellen.

Euler setzt nun

$$4) \quad \frac{\partial y}{y} = \frac{T \cdot \partial r + U \cdot r}{R \cdot \partial r + S \cdot r},$$

und findet, daß die neue Gleichung in r wiederum lineär wird, wenn die für T, U, R und S gewählten Funktionen von x der Gleichung

$$5) \quad (T^2 + U \cdot R - T \cdot S) + (R \cdot \partial T - T \cdot \partial R) + P \cdot R \cdot T + Q \cdot R^2 = 0$$

genügen. *)

*) Setzte man $\frac{\partial y}{y} = t$, so hätte man, wenn diese Gleichung

VII. Will man, um die lineäre Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0,$$

wo A_0 und A_1 Funktionen von x sind, zu integriren, einen neuen Veränderlichen s einführen, welcher zugleich der unabhängige Veränderliche werden soll, so muß man nicht vergessen, daß

$$\partial y_x = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \partial^2 y_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3} \quad \text{ist.}$$

Führt man nun den neuen Veränderlichen s durch die Gleichung

$$2) \quad \partial s_x = X \quad \text{oder} \quad \partial x_s = \frac{1}{X} \quad \text{d. h.} \quad \partial x = \frac{1}{X}$$

ein, so wird, indem man alle bloßen ∂ nach s genommen versteht,

$$\partial y_x = X \cdot \partial y; \quad \partial^2 x = -\frac{X^2}{\partial X}; \quad \text{also} \quad \partial^2 y_x = X^2 \cdot \partial^2 y + X \cdot \partial y \cdot \partial X.$$

Setzt man daher diese Werthe in die (1.), so erhält man

$$3) \qquad \partial^2 y + \frac{\partial X + A_1}{X} \cdot \partial y + \frac{A_0}{X^2} \cdot y = 0,$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach s bedeuten.

Nimmt man z. B. die Gleichung

$$x^2 \cdot (a + b \cdot x^n) \cdot \partial^2 y_x + x \cdot (c + e \cdot x^n) \cdot \partial y_x + (f + g \cdot x^n) \cdot y = 0,$$

mit welcher sich Euler und andere Analysten viel beschäftigt haben, und macht man

---

nach allem x integrirt wird,

$$log\ y = \int t \cdot dx, \quad \text{also} \quad y = e^{\int t \cdot dx};$$

und die obige Gleichung (3.) wird dann

$$(A_0 + A_1 \cdot t + t^2) + \partial t_x = 0,$$

welches genau dasselbe ist, was bereits in (I.) als geschehen sich vorfindet. Hätte man also dort, wo $t = V \cdot s$, dann in (II.) $t = \frac{U + V \cdot s}{S + T \cdot s}$ gesetzt worden ist, auch noch $t = \frac{T \cdot \partial r_x + U \cdot r}{K \cdot \partial r_x + S \cdot r}$ gesetzt, so wäre diese Nummer (VI.) bereits in dem in (II.) gesagten enthalten gewesen, und hier nicht mehr anzuführen.

$$x^n = s; \quad x = s^{\frac{1}{n}}; \quad \partial x = \frac{1}{n} \cdot s^{\frac{1}{n}-1};$$

so ist $$X = n \cdot s^{1-\frac{1}{n}};$$

und die gegebene Gleichung selbst geht durch diese Substitution über in

$$\partial^2 y_s + \left(\frac{n-1}{n \cdot s} + \frac{1}{n \cdot s} \cdot \frac{c+e \cdot s}{a+b \cdot s}\right) \cdot \partial y_s + \frac{1}{n^2 \cdot s^2} \cdot \frac{f+g \cdot s}{a+b \cdot s} \cdot y = 0,$$

welche Gleichung sich reduzirt auf eine andere von der Form

$$s^2 \cdot (a+bs) \cdot \partial^2 y_s + s \cdot (c'+e' \cdot s) \cdot \partial y_s + (f'+g' \cdot s) \cdot y = 0.$$

Diese letztere Gleichung ist aber von derselben Form wie die gegebene, wenn in der gegebenen $n = 1$ genommen wird. Sie ist also etwas einfacher als die gegebene.

Man hat dann in dieser letztern Gleichung

$$y = s^p \cdot (a+b \cdot s)^q \cdot v$$

gesetzt, wie in (III.) $y = R \cdot r$ gesetzt worden ist, und sie danach weiter behandelt. (Vgl. Pfaff's disquis. analyt. p. 138.).

VIII. Hat man die besondere lineäre Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$(a+b \cdot x)^2 \cdot \partial^2 y_x + (a+b \cdot x) \cdot P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0,$$

in welcher P und Q konstant sind, so ist dasmal, wenn man diese Gleichung mit der andern

2) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

vergleicht,

3) $A_1 = \frac{P}{a+b \cdot x}$ und 4) $A_0 = \frac{Q}{(a+b \cdot x)^2}$.

Hier macht man nun

4) $$a+b \cdot x = b \cdot t,$$

und die Gleichung (1.) geht dadurch über in

5) $$t^2 \cdot \partial^2 y_t + P \cdot b^{-1} \cdot t \cdot \partial y_t + Q \cdot b^{-2} = 0.$$

Setzt man nun hier

6) $y = t^m$, also $\partial y_t = m \cdot t^{m-1}$,
$\partial^2 y_t = m(m-1) \cdot t^{m-2}$,

so wird diese Gleichung wiederum

$$7) \qquad m(m-1)+P\cdot b^{-1}\cdot m+Q\cdot b^{-2}=0,$$

oder $$8) \qquad m^2+(P\cdot b^{-1}-1)m+Q\cdot b^{-2}=0;$$

und giebt für m zwei Werthe, die durch m_1 und m_2 bezeichnet seyn mögen. — Indem man nun auf diesem Wege für y zwei besondere Werthe

$$t^{m_1} \quad \text{und} \quad t^{m_2}$$

oder $$\left(\frac{a+bx}{b}\right)^{m_1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{a+bx}{b}\right)^{m_2}$$

hat, erhält man nach (§. 363.) zum allgemeinen Integral der (1.) die nachstehende Gleichung, nämlich:

$$y=C_1\cdot\left(\frac{a+bx}{x}\right)^{m_1}+C_2\cdot\left(\frac{a+bx}{x}\right)^{m_2} \text{ *)}$$

---

*) Diese Methode läßt sich mit der größesten Leichtigkeit auch auf die Gleichung der nten Ordnung von der Form

$$(\odot)\cdots\ (a+bx)^n\cdot\partial^n y_x+P\cdot(a+bx)^{n-1}\cdot\partial^{n-1}y_x+$$
$$+Q\cdot(a+bx)^{n-2}\cdot\partial^{n-2}y_x+\cdots+T\cdot(a+bx)\cdot\partial y_x+U\cdot y=0$$

anwenden, wenn nur P, Q, ꝛc. ꝛc. T, U konstant sind. Man erhält, indem

$$a+b\cdot x=b\cdot t$$

gesetzt wird,

$$(\mathbb{C})\cdots\ t^n\cdot\partial^n y_t+P\cdot b^{-1}\cdot t^{n-1}\cdot\partial^{n-1}y_t+Q\cdot b^{-2}\cdot t^{n-2}\cdot\partial^{n-2}y_t+\cdots$$
$$+T\cdot b^{-(n-1)}\cdot t\cdot\partial y_t+U\cdot b^{-n}\cdot y=0.$$

Man setzt in letzterer

$$y=t^m,$$

und erhält zur Bestimmung von m eine Gleichung vom nten Grade, welche für m die n Werthe m_1, m_2, m_3, ꝛc. ꝛc. m_n liefert.

Auch hat Legendre gezeigt, daß dieselbe Gleichung ($\mathbb{C}$), wenn man

$$\frac{\partial t}{t}=\partial u, \quad \text{d. h.} \quad log\ t=u \quad \text{oder} \quad t=e^u$$

setzt, und dann lauter Ableitungen nach u nimmt, allemal in eine andere übergeht, welche nach $y, \partial y_u, \partial^2 y_u, \cdots \partial^n y_u$ abermals lineär

C. Von der Integration der vollständigen lineären Gleichungen mit konstanten, oder veränderlichen Koeffizienten.

§. 370.

I. Obgleich wir bereits im (§. 363.) gelehrt haben, auch die lineäre Gleichung der 2ten Ordnung von der Form

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = X_x,$$

welche im Gegensatz zu dieser andern Form

$$2) \qquad A_0 \cdot y' + A_1 \cdot \partial y'_x + \partial^2 y'_x = 0,$$

die vollständige genannt wird, eben so einfach wie diese letztere reduzirte zu integriren; so ist doch nachstehende Methode des Lagrange zu wichtig, als daß wir sie hier vernachlässigen dürften.

Lagrange, um die Gleichung (1.) zu integriren, bildet sich zuerst die Gleichung (2.), indem er in (1.) 0 statt X schreibt. Dann sucht er von der Gleichung (2.) das allgemeine Ur-Integral

$$3) \qquad y' = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2,$$

so daß R_1 und R_2 bereits bekannte Funktionen von x sind, während C_1 und C_2 zwei willkührliche Konstanten vorstellen.

Ist nun dieses allgemeine Ur-Integral (3.) der Gleichung (2.) gefunden, so vermuthet Lagrange, daß dieses Ur-Integral der (2.) auch die Form des gesuchten Ur-Integrals der (1.) sey, nur mit dem Unterschiede, daß C_1 und C_2 noch unbekannte Funktionen von x seyn werden, welche noch gesucht werden müssen.

Er setzt daher das allgemeine Ur-Integral der Gleichung (1.) der Form nach fest durch die Gleichung

$$4) \qquad y = R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2,$$

---

ist, aber lauter konstante Koeffizienten hat, daher nach (§. 365.) ohne weiteres integrirt werden kann, so daß man zum Ur-Integral gelangt. Aber eben dieserhalb wird man schon die Gleichung (⊙) in eine andre lineäre Gleichung mit konstanten Koeffizienten verwandeln, so oft man nur einen neuen unabhängigen Veränderlichen u dadurch einführt, daß man $a + b \cdot x = e^u$ setzt.

wo R_1 und R_2 die bereits vorhin gefundenen Funktionen von x sind, C_1 und C_2 aber noch so gesucht werden (als Funktionen von x) α) daß die Gleichung (4.) der (1.) genüge; β) daß sie auch zwei willkührliche Konstanten in sich aufnehmen, um ein allgemeines Ur-Integral zu haben.

Man erhält aber aus (4.) und (3.)

5) $y = y'$ der Form nach;

ferner $\partial y_x = \partial y_x' + R_1 \cdot \partial C_1 + R_2 \cdot \partial C_2$,

also auch

6) $\partial y_x = \partial y_x'$ der Form nach,

so oft man für C_1 und C_2 solche Funktionen von x nimmt, daß

7) $R_1 \cdot \partial C_1 + R_2 \cdot \partial C_2 = 0$

wird. — Endlich wird

8) $\partial^2 y_x = \partial^2 y_x' + \partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2$.

Setzt man nun diese Werthe aus (5. 6 und 8.) statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die Gleichung (1.), so geht sie wegen der (2.) in

9) $\partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2 = X$

über. Löst man nun die Gleichungen (7. und 9.) nach ∂C_1 und ∂C_2 algebraisch auf, so erhält man

10) $$\partial C_1 = \frac{R_2 \cdot X}{R_2 \cdot \partial R_1 - R_1 \cdot \partial R_2}'$$

also $$C_1 = \int \frac{R_2 \cdot X}{R_2 \cdot \partial R_1 - R_1 \cdot \partial R_2} \cdot dx + c_1;$$

11) $$\partial C_2 = \frac{R_1 \cdot X}{R_1 \cdot \partial R_2 - R_2 \cdot \partial R_1}'$$

also $$C_2 = \int \frac{R_1 \cdot X}{R_1 \cdot \partial R_2 - R_2 \cdot \partial R_1} \cdot dx + c_2.$$

Setzt man daher diese Werthe statt C_1 und C_2 in die Gleichung (4.), so hat man das allgemeine Ur-Integral der Gleichung (1.); denn es hat zwei willkührliche Konstanten c_1 und c_2, und es genügt der Gleichung (9.), in welche die (1.) unter der

Bedingung, daß die (7.) identisch wird (welches hier der Fall), übergegangen ist. *)

II. Sind daher in der vollständigen lineären Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = X$$

die Koeffizienten A_0 und A_1 konstant, so ist das allgemeine Ur-Integral der

$$2) \qquad A_0 \cdot y' + A_1 \cdot \partial y'_x + \partial^2 y'_x = 0,$$

jetzt $$3) \qquad y' = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x},$$

wenn m_1 und m_2 die zwei verschiedenen Wurzelwerthe der Gleichung

$$m^2 + A_1 \cdot m + A_0 = 0$$

sind. — Man hat daher hier

$$R_1 = e^{m_1 \cdot x}; \qquad \partial R_1 = e^{m_1 \cdot x} \cdot m_1;$$

$$R_2 = e^{m_2 \cdot x}; \qquad \partial R_2 = e^{m_2 \cdot x} \cdot m_2;$$

demnach wird jetzt

$$C_1 = \frac{1}{m_1 - m_2} \cdot \int X \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx + c_1$$

und

$$C_2 = \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot \int X \cdot e^{-m_2 \cdot x} \cdot dx + c_2;$$

wo die bloß angezeigten Integrale besondere Integrale vorstellen. Also ist das allgemeine Ur-Integral der (1.) jetzt

$$y = \frac{e^{m_1 \cdot x}}{m_1 - m_2} \cdot \int X \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx + \frac{e^{m_2 \cdot x}}{m_2 - m_1} \cdot \int X \cdot e^{-m_2 \cdot x} \cdot dx + c_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{m_2 \cdot x}.$$

III. Sind die beiden Werthe m_1 und m_2 der vorigen

---

*) Weil die Buchstaben C_1 und C_2 anfänglich in Bezug auf die Gleichung (2.) die willkührlichen Konstanten gewesen, jetzt aber in Bezug auf die Gleichung (1.) als Funktionen von x gesucht worden sind, so nennt man diese Methode die der Variation der Konstanten.

(Nr. II.) imaginär und zwar $m_1 = \alpha + \beta \cdot i$, $m_2 = \alpha - \beta \cdot i$, so erhält man sogleich dasselbe allgemeine Ur-Integral, wenn man will, auch in dieser andern Form, nämlich

$$y = e^{\alpha x} \cdot Cos\,\beta x \cdot \left(c_1 - \frac{1}{\beta} \cdot \int e^{-\alpha x} \cdot X \cdot Sin\,\beta x \cdot dx \right)$$
$$+ e^{\alpha x} \cdot Sin\,\beta x \cdot \left(c_2 + \frac{1}{\beta} \cdot \int e^{-\alpha x} \cdot X \cdot Cos\,\beta x \cdot dx \right).$$

Es ist nämlich nun auch

$$R_1 = e^{\alpha x} \cdot (Cos\,\beta x + i \cdot Sin\,\beta x)$$
$$R_2 = e^{\alpha x} \cdot (Cos\,\beta x - i \cdot Sin\,\beta x);$$

und daraus folgt der vorige Ausdruck für y, wenn man genau nach (I.) verfährt.

IV. Sind aber wieder von der Gleichung

1) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = X$$

die Koeffizienten A_0 und A_1 konstant, dagegen die beiden Werthe m_1 und m_2 einander gleich, welches der Fall ist, so oft $\frac{1}{4} A_1^2 - A_0 = 0$ wird, so ist von der Gleichung

2) $$A_0 \cdot y' + A_1 \cdot \partial y'_x + \partial^2 y'_x = 0$$

das allgemeine Ur-Integral jetzt

3) $$y' = e^{m_1 \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x).$$

Jetzt ist daher zwar wiederum

$$R_1 = e^{m_1 \cdot x}; \qquad \partial R_1 = e^{m_1 \cdot x} \cdot m_1;$$

dagegen

$$R_2 = x \cdot e^{m_1 \cdot x}; \qquad \partial R_2 = e^{m_1 \cdot x} + m_1 \cdot x \cdot e^{m_1 \cdot x}.$$

Demnach hat man jetzt

$$C_1 = -\int x \cdot X \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx + c_1$$

und

$$C_2 = \int X \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx + c_2.$$

Also ist das allgemeine Ur-Integral der (I.) jetzt

4) $$y = -e^{m_1 x} \cdot \int x \cdot X_x \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx + e^{m_1 x} \cdot x \cdot \int X_x \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot dx$$
$$+ e^{m_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x);$$

oder nach (§. §. 206. 207. d. V. Th. d. S.)

5) $y = e^{m_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x) + \int_{x \div x'} (x - z) \cdot X_z \cdot e^{m_1 (x-z)} \cdot dz,$

in so ferne die angezeigten Integrale besondere Integrale vorstellen, also auch so gedacht werden können, daß sie mit $x = x'$ anfangen.

§. 371.

Diese Methode der Variation der Konstanten läßt sich auf vollständige lineäre Gleichungen einer beliebigen nten Ordnung ausdehnen.

I. Gesetzt man habe die Gleichung der 3ten Ordnung

1) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \partial^3 y_x = X,$

und von dieser andern Gleichung

2) $A_0 \cdot y' + A_1 \cdot \partial y'_x + A_2 \cdot \partial^2 y'_x + \partial^3 y'_x = 0$

bereits das allgemeine Ur-Integral gefunden, nämlich

3) $y' = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3;$

so nimmt man als allgemeines Ur-Integral der (1.) dieselbe Form an, nämlich

4) $y = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3,$

denkt sich aber unter C_1, C_2 und C_3 noch gesuchte Funktionen von x, welche den dreien Bedingungen, nämlich daß (auffer $y = y'$, auch) noch $\partial y_x = \partial y'_x$; $\partial^2 y_x = \partial^2 y'_x$ werde, der Form nach, und endlich daß der Gleichung (1.) genügt werde. Damit aber $\partial y_x = \partial y'_x$ werde, muß der Unterschied beider der Null gleich seyn, d. h. die gesuchten Funktionen C_1, C_2, C_3 müssen zunächst so gewählt werden, daß

5) $R_1 \cdot \partial C_1 + R_2 \cdot \partial C_2 + R_3 \cdot \partial C_3 = 0$

ist. Findet man aber nun aus ∂y_x und $\partial y'_x$, welche jetzt der Form nach dieselben sind, durch neues Differenziiren nach allem x, die zweiten Ableitungen $\partial^2 y_x$ und $\partial^2 y'_x$, so zeigen sich bei dem ersten Ausdruck $\partial^2 y_x$ die Glieder, welche davon herrühren, daß C_1, C_2, C_3 nicht konstant sind (nach x); und diese kommen in $\partial^2 y'_x$ nicht vor. Diese Glieder müssen daher der Null gleich

werden, d. h. die Funktionen C_1, C_2, C_3 müssen so gewählt werden, daß auch dieser Unterschied verschwindet, d. h. daß

$$6) \quad \partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2 + \partial R_3 \cdot \partial C_3 = 0$$

wird. — Hat man aber auf diese Weise die Funktionen C_1, C_2, C_3 sich so gedacht, daß nicht bloß $y = y'$, $\partial y_x = \partial y'_x$, sondern auch $\partial^2 y_x = \partial^2 y'_x$ ist, der Form nach; so daß sich diese Ausdrücke nur noch dadurch unterscheiden, daß in denen zur Linken die C_1, C_2, C_3 noch unbekannte Funktionen von x vorstellen, in denen zur Rechten dagegen konstant gedacht werden, so erhält man zuletzt noch

$$7) \quad \partial^3 y_x = \partial^3 y'_x + \partial^2 R_1 \cdot \partial C_1 + \partial^2 R_2 \cdot \partial C_2 + \partial^2 R_3 \cdot \partial C_3.$$

Setzt man nun diese Werthe y', $\partial y'_x$, $\partial^2 y'_x$ und diesen Werth in (7.) zur Rechten, statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ in die gegebene Gleichung (1.), so soll diese identisch werden; sie wird aber wegen der (2.) augenblicklich

$$8) \quad \partial^2 R_1 \cdot \partial C_1 + \partial^2 R_2 \cdot \partial C_2 + \partial^2 R_3 \cdot \partial C_3 = X.$$

Um daher diese Gleichung auch durch die gesuchten Funktionen C_1, C_2, C_3 identisch zu machen, löse man die 3 Gleichungen (5. 6. und 8.) nach ∂C_1, ∂C_2 und ∂C_3 algebraisch auf, und man wird finden

$$9) \quad \partial C_1 = X_1; \quad \partial C_2 = X_2; \quad \partial C_3 = X_3;$$

demnach

$$10) \quad C_1 = \int X_1 \cdot dx + c_1; \quad C_2 = \int X_2 \cdot dx + c_2;$$

und

$$C_3 = \int X_3 \cdot dx + c_3.$$

Setzt man nun diese Werthe statt C_1, C_2 und C_3 in die Gleichung (4.), so hat man das allgemeine Ur-Integral der Gleichung (1.).

II. Sollte man von der Gleichnng (2.) nicht 3 sondern nur 2 besondere Werthe R_1 und R_2 erhalten können, so daß man für die Gleichung (2.) das allgemeine Ur-Integral nicht, sondern nur das besondere

$$11) \quad y' = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2$$

erhalten hätte, also daß in dem allgemeinen Integral $C_3 = 0$ genommen gedacht werden muß, so könnte man noch immer versuchen, daraus das allgemeine Ur-Integral der (1.) zu erhalten, indem man

12) $$y = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2$$

als solches der Form nach annimmt, aber nur noch die unter C_1 und C_2 nun gedachten Funktionen von x dazu findet. — Damit nun wieder ∂y_x und $\partial y'_x$ der Form nach nicht von einander verschieden seyen, müßte man wieder

13) $$R_1 \cdot \partial C_1 + R_2 \cdot \partial C_2 = 0$$

nehmen. Weil man aber jetzt nur zwei Funktionen C_1 und C_2 zu bestimmen hat, und diese der Gleichung (1.) zu genügen haben, so kann man ausser der Gleichung (13.) jetzt keiner neuen Bedingung sie unterwerfen. Man kann daher jetzt nicht auch noch $\partial^2 y_x$ und $\partial^2 y'_x$ der Form nach einander gleich machen, sondern man erhält nun

14) $$\partial^2 y_x = \partial^2 y'_x + \partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2,$$

aber dann, weil in dem Ausdruck für $\partial^2 y'_x$ auch noch C_1 und C_2 vorkommen, so daß

$$\partial(\partial^2 y'_x) = \partial^3 y'_x + \partial^2 R_1 \cdot \partial C_1 + \partial^2 R_2 \cdot \partial C_2$$

wird, aufs neue

15) $$\partial^3 y_x = \partial^3 y'_x + 2\partial^2 R_1 \cdot \partial C_1 + 2\partial^2 R_2 \cdot \partial C_2 + \partial R_1 \cdot \partial^2 C_1 + \partial R_2 \cdot \partial^2 C_2,$$

Setzt man daher diese Werthe in die Gleichung (1.), so erhält man

16) $$\partial R_1 \cdot \partial^2 C_1 + \partial R_2 \cdot \partial^2 C_2 + \begin{pmatrix} 2\partial^2 R_1 \\ + A_2 \cdot \partial R_1 \end{pmatrix} \cdot \partial C_1 + \begin{pmatrix} 2\partial^2 R_2 \\ + A_2 \cdot \partial R_2 \end{pmatrix} \cdot \partial C_2 = X.$$

Aus (13. und 16.) sind nun C_1 und C_2 zu finden. Man muß daher nun (nach §. 281. d. V. Th. d. S.) aus diesen Gleichungen (13. und 16.) C_2 und alle Ableitungen von C_2 eliminiren, und zu diesem Behufe die (13.) differenziiren, wodurch man erhält

17) $\partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2 + R_1 \cdot \partial^2 C_1 + R_2 \cdot \partial^2 C_2 = 0.$

Eliminirt man aber nun aus (13. 16. u. 17.) sowohl ∂C_2 als $\partial^2 C_2$, so erhält man eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zur Bestimmung von C_1, welche integrirt werden müßte, um C_1 mit zwei willkührlichen Konstanten zu erhalten. Nachgehends bestimmt sich daraus, weil in diesen Gleichungen (13. 16. und 17.) C_2 selbst nicht vorkommt, bloß ∂C_2, also daß C_2 noch eine dritte Konstante erhält.

III. Hätte man endlich für die Gleichung (2.) nur einen einzigen genügenden Werth $y' = R_1$, und wollte man nun

18) $$y = C_1 \cdot R_1$$

als das allgemeine Ur-Integral der (1.) nehmen, und noch die Funktion C_1 von x dazu finden, so würde man zur Bestimmung von C_1 eine Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung erhalten, nämlich

19) $$R_1 \cdot \partial^3 C_1 + \begin{pmatrix} 3\partial R_1 \\ +A_2 \cdot R_1 \end{pmatrix} \cdot \partial^2 C_1 + \begin{pmatrix} 3\partial^2 R_1 \\ +2A_2 \cdot \partial R_1 \\ +A_1 \cdot R_1 \end{pmatrix} \cdot \partial C_1 = X.$$

In dieser Gleichung kann man $\partial C_1 = v$ setzen, und sie wird dann bloß v, ∂v und $\partial^2 v$ enthalten, also bloß eine Gleichung der 2ten Ordnung seyn. Man erhält zuletzt C_1 mit 3 willkührlichen Konstanten.

§. 372.

I. Ist die gegebene vollständige lineäre Gleichung von der 4ten Ordnung, nämlich

1) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + A_3 \cdot \partial^3 y_x + \partial^4 y_x = X;$$

so integrirt man zuerst diese andere Gleichung

2) $$A_0 \cdot y' + A_1 \cdot \partial y'_x + A_2 \cdot \partial^2 y'_x + A_3 \cdot \partial^3 y'_x + \partial^4 y'_x = 0,$$

so daß man zu ihrem allgemeinen Ur-Integral

3) $y' = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 + C_4 \cdot R_4$

gelangt. — Hernach nimmt man das allgemeine Ur-Integral der (1.) von derselben Form

4) $y = C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 R_3 + C_4 \cdot R_4$,

sucht aber C_1, C_2, C_3 und C_4 noch als Funktionen von x, welche den folgenden Gleichungen genügen, nämlich dieser einen

5) $R_1 \cdot \partial C_1 + R_2 \cdot \partial C_2 + R_3 \cdot \partial C_3 + R_4 \cdot \partial C_4 = 0$,

damit ∂y_x von $\partial y'_x$ der Form nach nicht verschieden sey; dann dieser andern

6) $\partial R_1 \cdot \partial C_1 + \partial R_2 \cdot \partial C_2 + \partial R_3 \cdot \partial C_3 + \partial R_4 \cdot \partial C_4 = 0$,

damit auch $\partial^2 y_x$ von $\partial^2 y'_x$ sich der Form nach nicht unterscheide; ferner dieser neuen

7) $\partial^2 R_1 \cdot \partial C_1 + \partial^2 R_2 \cdot \partial C_2 + \partial^2 R_3 \cdot \partial C_3 + \partial^2 R_4 \cdot \partial C_4 = 0$,

damit auch $\partial^3 y_x$ sich nicht von $\partial^3 y'_x$ (der Form nach) unterscheide; endlich der Gleichung

8) $\partial^3 R_1 \cdot \partial C_1 + \partial^3 R_2 \cdot \partial C_2 + \partial^3 R_3 \cdot \partial C_3 + \partial^3 R_4 \cdot \partial C_4 = X$,

auf welche sich die (1.) nun zurückzieht.

Man findet daher aus den 4 Gleichungen (5. 6. 7 und 8.) die 4 Ausdrücke

9) $\partial C_1 = X_1$; $\partial C_2 = X_2$; $\partial C_3 = X_3$; $\partial C_4 = X_4$;

und daraus sogleich

10) $C_1 = \int X_1 \cdot dx + c_1$; $C_2 = \int X_2 \cdot dx + c_2$;

$C_3 = \int X_3 \cdot dx + c_3$ und $C_4 = \int X_4 \cdot dx + c_4$.

Setzt man aber diese Werthe in die Gleichung (4.), so hat man das allgemeine Ur-Integral der (1.).

II. Es seyen die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 und A_3 alle konstant, und daher jetzt

11) $R_1 = e^{m_1 \cdot x}$; $R_2 = e^{m_2 \cdot x}$; $R_3 = e^{m_3 \cdot x}$; und $R_4 = e^{m_4 \cdot x}$;

wenn nämlich die 4 Wurzelwerthe m_1, m_2, m_3, m_4 von m aus der Gleichung

12) $m^4 + A_3 \cdot m^3 + A_2 \cdot m^2 + A_1 \cdot m + A_0 = 0,$

alle 4 von einander verschieden sind. Dann findet sich

13) $\partial C_1 = a_1 \cdot e^{-m_1 \cdot x} \cdot X; \quad \partial C_2 = a_2 \cdot e^{-m_2 \cdot x};$

$\partial C_3 = a_3 \cdot e^{-m_3 \cdot x} \cdot X; \quad \partial C_4 = a_4 \cdot e^{-m_4 \cdot x} \cdot X;$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 konstante, von m_1, m_2, m_3, m_4 abhängige Koeffizienten sind.

Hat man sich aber der Form der Ausdrücke in (13.) schon im Voraus versichert, so kann man die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 auch noch auf folgende Weise leicht dazu finden. Setzt man nämlich diese Formen aus (13.), so wie die Werthe aus (11.) in die 4 Gleichungen (5.—8.) statt $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3, \partial C_4$ und statt R_1, R_2, R_3, R_4, so gehen diese Gleichungen (5.—8.) in folgende über

14) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,$

15) $m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + m_3 \cdot a_3 + m_4 \cdot a_4 = 0,$

16) $m_1^2 \cdot a_1 + m_2^2 \cdot a_2 + m_3^2 \cdot a_3 + m_4^2 \cdot a_4 = 0,$

17) $m_1^3 \cdot a_1 + m_2^3 \cdot a_2 + m_3^3 \cdot a_3 + m_4^3 \cdot a_4 = 1.$

Bildet man sich nun die identische Gleichung

18) $(m' - m_2)(m' - m_3)(m' - m_4) =$

$= m'^3 + P' \cdot m'^2 + Q' \cdot m' + R';$

multiplizirt man dann die (14.) mit R', die (15.) mit Q', die (16.) mit P', die (17.) mit 1 (d. h. gar nicht), und addirt man die 4 Resultate, so ergiebt sich

19) $\left\{\begin{array}{l} a_1 \cdot [m_1^3 + P' \cdot m_1^2 + Q' \cdot m_1 + R'] \\ + a_2 \cdot [m_2^3 + P' \cdot m_2^2 + Q' \cdot m_2 + R'] \\ + a_3 \cdot [m_3^3 + P' \cdot m_3^2 + Q' \cdot m_3 + R'] \\ + a_4 \cdot [m_4^3 + P' \cdot m_4^2 + Q' \cdot m_4 + R'] \end{array}\right\} = 1.$

Wegen (18.) reduzirt sich aber diese Gleichung (19.) bloß auf ihre erste Zeile und giebt

20) $a_1 = \frac{1}{(m_1 - m_2) \cdot (m_1 - m_3) \cdot (m_1 - m_4)}.$

Gerade so findet sich aber dann auch auf analogem Wege

$$21)\quad a_2 = \frac{1}{(m_2-m_1)\cdot(m_2-m_3)\cdot(m_2-m_4)},$$

$$22)\quad a_3 = \frac{1}{(m_3-m_1)\cdot(m_3-m_2)\cdot(m_3-m_4)},$$

$$23)\quad a_4 = \frac{1}{(m_4-m_1)\cdot(m_4-m_2)\cdot(m_4-m_3)}.$$

Auch die Nenner dieser Brüche lassen sich leichter noch finden. Bedenkt man nämlich, daß, weil m_1, m_2, m_3, m_4 die Wurzelwerthe der Gleichung (12.) sind, man hat

$$24)\quad (m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4) = f_m,$$

wenn unter

25) f_m der Ausdruck $m_4+A_3\cdot m^3+A_2\cdot m^2+A_1\cdot m+A_0$ verstanden wird; und differenziirt man daher diese Gleichung (24.) nach m: so erhält man nach (§. 99. d. IV. Th. d. S.)

$$26)\quad a_1 = \frac{1}{[\partial f_m]_{m_1}};\quad a_2 = \frac{1}{[\partial f_m]_{m_2}};\quad a_3 = \frac{1}{[\partial f_m]_{m_3}};$$

und eben so auch noch a_4.

[Wegen der Bezeichnung sehe man (§. 204. d. V. Th. d. S.)]

III. Sind, wie in (II.), die Koeffizienten A_0, A_1, A_2 u. A_3 konstant, aber die Wurzelwerthe m_1 und m_2 imaginär und zwar

$$m_1 = \alpha+\beta\cdot i \quad \text{und} \quad m_2 = \alpha-\beta\cdot i,$$

unter i eine der beiden Formen von $\sqrt{-1}$ verstanden; so werden die zwei entsprechenden Glieder des allgemeinen Ur-Integrals der Gleichung (1.) jetzt die Form annehmen

$$\frac{e^{x\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\cdot\int e^{-x\cdot(\alpha+\beta\cdot i)}\cdot X\cdot dx}{a+b\cdot i} + \frac{e^{x\cdot(\alpha-\beta\cdot i)}\cdot\int e^{-x\cdot(\alpha-\beta\cdot i)}\cdot X\cdot dx}{a-b\cdot i},$$

wo $a+b\cdot i$ und $a-b\cdot i$ die Ausdrücke sind, welche beziehlich aus

$$(m_1-m_2)\cdot(m_1-m_3)\cdot(m_1-m_4)$$

und $$(m_2-m_1)\cdot(m_2-m_3)\cdot(m_2-m_4)$$

hervorgehen, wenn $\alpha+\beta\cdot i$ und $\alpha-\beta\cdot i$ beziehlich statt m_1 und m_2 gesetzt werden. — Diese zwei Glieder des allgemeinen Ur-Integrals lassen sich aber dann sogleich in folgende umformen, nämlich in

$$\frac{e^{\alpha x}\cdot(2a\cdot Cos\,\beta x+2b\cdot Sin\,\beta x)\cdot\int e^{-\alpha x}\cdot X\cdot Cos\,\beta x\cdot dx}{a^2+b^2}+$$

$$+\frac{e^{\alpha x}\cdot(2a\cdot Sin\,\beta x-2b\cdot Cos\,\beta x)\cdot\int e^{-\alpha x}\cdot X\cdot Sin\,\beta x\cdot dx}{a^2+b^2},$$

wo die Integralzeichen $\int$ die beiden willkührlichen Konstanten in sich enthalten. *)

IV. Werden von den 4 Werthen m_1, m_2, m_3, m_4 der (II.), zwei derselben einander gleich z. B. $m_1 = m_2$, so hat man nicht mehr $R_2 = e^{m_2\cdot x}$, sondern jetzt

$$R_1 = e^{m_1\cdot x} \text{ und } R_2 = x\cdot e^{m_1\cdot x}.$$

Die Ableitungen $\partial R_1, \partial^2 R_1, \partial^3 R_1$ bleiben daher jetzt wie vorher; dagegen werden die Ableitungen $\partial R_2, \partial^2 R_2, \partial^3 R_2$, welche vorher beziehlich

$$e^{m_1\cdot x}\cdot m_1, \quad e^{m_1\cdot x}\cdot m_1^2, \quad e^{m_1\cdot x}\cdot m_1^3$$

gewesen sind, jetzt

$$e^{m_1\cdot x}(1+m_1\cdot x), \quad e^{m_1\cdot x}\cdot(2m_1+m_1^2\cdot x), \quad e^{m_1\cdot x}\cdot(3m_1^2+m_1^3\cdot x).$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen (5.—8. der I.), so wie noch $R_3 = e^{m_3\cdot x}$ und $R_4 = e^{m_4\cdot x}$, so wird man nun $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3, \partial C_4$ der jetzigen Voraussetzung gemäß erhalten.

Man kann sich aber dieselben Resultate bequemer noch da-

---

*) Man kann diese Resultate auch direkt erhalten, wenn man in diesem Falle das Integral der (2.) sogleich auf die Form

$$y' = C_1\cdot e^{\alpha x}\cdot Cos\,\beta x + C_2\cdot e^{\alpha x}\cdot Sin\,\beta x + C_3\cdot e^{m_3\cdot x} + C_4\cdot e^{m_4\cdot x}$$

bringt, also nun $R_1 = e^{\alpha x}\cdot Cos\,\beta x$ und $R_2 = e^{\alpha x}\cdot Sin\,\beta x$ nimmt, und dann die $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3$ und ∂C_4 nach (I.) findet, wo sich denn die C_1, C_2, C_3, C_4 sogleich in der hier gewünschten Form ergeben. (Vgl. §. 370. III.).

durch verschaffen, daß man das allgemeine Ur=Integral genau wie in (II.) findet, indem man sich die m_1, m_2, m_3, m_4 alle 4 verschieden denkt; also findet

$$(\sigma)\ldots\quad y = \frac{e^{m_1 \cdot x}}{[\partial f_m]_{m_1}} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx + \frac{e^{m_2 \cdot x}}{[\partial f_m]_{m_2}} \cdot \int e^{-m_2 \cdot x} \cdot X \cdot dx$$
$$+ \frac{e^{m_3 \cdot x}}{[\partial f_m]_{m_3}} \cdot \int e^{-m_3 \cdot x} \cdot X \cdot dx + \frac{e^{m_4 \cdot x}}{[\partial f_m]_{m_4}} \cdot \int e^{-m_4 \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

dann hier $m_1 + h$ statt m_2 setzt, die Ausdrücke durch die Entwicklung nach Potenzen von h so umformt, daß, wenn man zuletzt 0 statt h schreibt, nicht mehr $\frac{0}{0}$ erscheint, sondern ein im Kalkul brauchbarer Ausdruck, welcher dann der hier für y gesuchte ist. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{f_m}{(m - m_1)(m - m_2)} \text{ durch } M_m,$$

so lassen sich die zwei ersten Glieder des vorstehenden Ausdrucks (σ) jetzt so schreiben

$$\frac{1}{m_1 - m_2} \cdot \left(\frac{e^{m_1 \cdot x} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx}{[M_m]_{m_1}} - \frac{e^{m_2 \cdot x} \cdot \int e^{-m_2 \cdot x} \cdot X \cdot dx}{[M_m]_{m_2}} \right).$$

Setzt man nun hier $m_1 + h$ statt m_2, entwickelt man das Produkt

$$\left[\frac{1}{M_m}\right]_{m_1 + h} \cdot e^{(m_1 + h) \cdot x} \cdot \int e^{-(m_1 + h) \cdot x} \cdot X \cdot dx$$

in eine nach Potenzen von h fortlaufende Reihe, hebt ein h mittelst des Faktors $\frac{1}{m_1 - m_2} = -\frac{1}{h}$ weg, und setzt man dann 0 statt h, so erhält man jetzt statt derselben beiden ersten Glieder des Ausdrucks (σ) die folgenden:

$$\frac{e^{m_1 \cdot x} \cdot (x \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx - \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot x \cdot dx)}{[M_m]_{m_1}} +$$
$$+ \partial\left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx$$

oder (nach §§. 206. 207. d. V. Th. d. S.)

$$\frac{1}{[M_m]_{m_1}} \cdot \int_x (x - z) \cdot e^{m_1 \cdot (x - z)} \cdot X_z \cdot dz + \partial\left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot \int_x e^{m_1 \cdot (x - z)} \cdot X_z \cdot dz$$
$$+ c^{m_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x);$$

oder auch

$$\frac{1}{[M_m]_{m_1}} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int^2 e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx^2 + \partial\left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx.$$

Sind aber drei der Werthe m_1, m_2, m_3 einander gleich, so findet man auf demselben Wege, wenn der Kürze wegen

$$\frac{f_m}{(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)} \text{ durch } M_m$$

bezeichnet wird, die 3 ersten Glieder des vorstehenden Ausdruckes (♂) für y jetzt

$$\frac{e^{m_1 \cdot x} \cdot (x^2 \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx - 2x \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot x \cdot dx + \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot x^2 \cdot dx)}{2[M_m]_{m_1}}$$

$$+ \partial\left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot (x \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx - \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot x \cdot dx) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \partial^2 \left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

oder

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{M_{m_1}} \cdot \int_x (x-z)^2 \cdot e^{m_1 \cdot (x-z)} \cdot X_z \cdot dz +$$

$$+ \partial\left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot \int_x (x-z) \cdot e^{m_1 \cdot (x-z)} \cdot X_z \cdot dz +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \partial^2 \left(\frac{1}{M_{m_1}}\right)_{m_1} \cdot \int_x e^{m_1 \cdot (x-z)} \cdot X_z \cdot dz + e^{m_1 \cdot x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2)$$

oder

$$\frac{1}{M_{m_1}} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int^3 e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx^3 + \partial\left(\frac{1}{M_m}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int^2 e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \partial^2 \left(\frac{1}{M_m}\right)_{m_1} \cdot e^{m_1 \cdot x} \cdot \int e^{-m_1 \cdot x} \cdot X \cdot dx.$$

§. 373.

Jeder Anfänger kann aber alles vorstehende nun augenblicklich auf lineäre Gleichungen der nten Ordnung ausdehnen. Ja es ist hier die Form der Rechnung so gewählt worden, daß selbst die Formeln, welche das allgemeine Ur-Integral oder einige Glieder desselben ausdrücken, durchaus unverändert dieselben bleiben, wenn auch n statt 4 gedacht wird.

Erinnert man sich jedoch des Ausdrucks (9.) in (§. 365. V.)

für das allgemeine Ur=Integral der reduzirten lineären Gleichung mit konstanten Koeffizienten, so kann man für das allgemeine Ur=Integral der vollständigen lineären Gleichung der nten Ordnung

$$1)\quad A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + A_3 \cdot \partial^3 y_x + \cdots + \partial^n y_x = X$$

mit konstanten Koeffizienten leicht noch folgenden allgemeinen Ausdruck angeben, nämlich

$$2)\quad y = \Sigma \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\partial^{\alpha-1}\left((m-m_{\alpha'})^{\alpha}\cdot\frac{\varphi_m \cdot e^{m.x}}{f_m}\right)_m\right]_{m_{\alpha'}}$$

$$+\Sigma \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\partial^{\alpha-1}\left(\frac{(m-m_{\alpha'})^{\alpha}}{f_m}\cdot\int_{x\div x'} e^{m(x-z)}\cdot X_z \cdot dz\right)_m\right]_{m_{\alpha'}};$$

wenn hier wiederum wie dort

$$f_m = A_0 + A_1 \cdot m + A_2 \cdot m^2 + A_3 \cdot m^3 + \cdots + m^n$$

ist; wenn $m_{\alpha'}$ nach und nach jeden der Wurzelwerthe der Gleichung $f_m = 0$ vorstellt; wenn α allemal anzeigt, wie oft der Wurzelwerth $m_{\alpha'}$ in der Gleichung $f_m = 0$ vorkommt; wenn ferner φ_m eine willkührliche Funktion von m mit n willkührlichen Konstanten ist, und wenn Σ anzeigt, daß die Summe aller der Glieder genommen werden soll, welche aus dem Ausdruck hinter dem Σ hervorgehen, wenn man statt $m_{\alpha'}$ nach und nach alle die verschiedenen Wurzelwerthe der Gleichung $f_m = 0$ setzt.

Man kann aber dieses Resultat entweder den Formen absehen, welche im (§. 372. Ende) für den speziellen Werth von $n = 4$ bereits gefunden worden sind, oder man kann solches auch aus dem Resultat (§. 365. V. 9.) ableiten, indem man die konstanten Koeffizienten in dem dortigen φ_m nach der Lagrange'schen Methode variiren läßt. Denkt man sich nämlich unter dem dortigen φ_m eine Funktion von x, so daß

$$3)\quad y = \Sigma \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\partial^{\alpha-1}\left((m-m_{\alpha'})^{\alpha}\cdot\frac{\varphi_{x,m}\cdot e^{m.x}}{f_m}\right)_m\right]_{m_{\alpha'}}$$

als das allgemeine Integral der (1.) angesehen werden soll, während $\varphi_{x,m}$ noch dem gemäß zu bestimmen bleibt, so erhält man, damit im Falle der variablen Koeffizienten die $\partial y_{x'}$, $\partial^2 y_{x'}$, $\cdots$ $\partial^{n-1} y_x$ dieselben bleiben, wie im Falle der konstanten Koeffizienten, die Gleichungen

$$4)\quad \Sigma \frac{1}{(a-1)!}\left[\partial^{a-1}\left((m-m_{a'})^{a}\cdot\frac{e^{m.x}\cdot m^{b}\cdot\partial\varphi_x}{f_m}\right)_m\right]_{m_{a'}}=0,$$

man mag für b die Werthe 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder ꝛc. ꝛc. oder n—2 setzen; dagegen als Endgleichung statt der gegebenen (1.) jetzt

$$5)\quad \Sigma \frac{1}{(a-1)!}\left[\partial^{a-1}\left((m-m_{a'})^{a}\cdot\frac{e^{m.x}\cdot m^{n-1}\cdot\partial\varphi_x}{f_m}\right)_m\right]_{m_{a'}}=X.$$

Weiß man nun aus der Lehre der höhern Gleichungen, daß

$$\Sigma \frac{1}{(a-1)!}\left[\partial^{a-1}\left((m-m_{a'})^{a}\cdot\frac{m^{b}}{f_m}\right)_m\right]_{m_{a'}}$$

allemal 0 oder 1 ist, je nachdem man $b<n-1$ oder $=n-1$ hat, so ist den Gleichungen (4. u. 5.) offenbar genügt, wenn man $\varphi_{x,m}$ so nimmt, daß

$$e^{m.x}\cdot\partial\varphi_x=X \quad \text{d. h.} \quad \varphi_{x,m}=\int_{x+x'}e^{-m.z}\cdot X_z\cdot dz+\varphi_m$$

wird, wo x' irgend ein Anfangswerth von z, dagegen φ_m nach x konstant übrigens aber eine beliebige Funktion von m ist.

Dadurch ist aber die Formel (2.) auser Zweifel gesetzt.

Anmerkung. Da wir bereits (§. 369. VIII.) gesehen haben, daß sich die besondere lineäre Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten

$$(\mathfrak{C})\cdots \frac{A_0}{(Ax+B)^n}\cdot y+\frac{A_1}{(Ax+B)^{n-1}}\cdot\partial y_x+\frac{A_2}{(Ax+B)^{n-2}}\cdot\partial^2 y_x+\cdots$$
$$\frac{A_{n-1}}{Ax+B}\cdot\partial^{n-1}y_x+\partial^n y_x=X$$

sogleich in eine andere lineäre Gleichung mit konstanten Koeffizienten umwandelt, sobald man

$$Ax+B=e^u$$

setzt; so folgt, daß man auch von dieser Gleichung ($\mathfrak{C}$) das allgemeine Integral auf eine ähnliche Weise wird hinschreiben können. Es ist nämlich solches allgemeine Ur-Integral der Gleichung ($\mathfrak{C}$) das nachstehende:

$$(\odot)\cdots\quad y = \Sigma \frac{1}{(a-1)!}\Big[\partial^{a-1}\Big((m-m_{a'})^a \cdot \frac{(Ax+B)^m \cdot \varphi_m}{F_m}\Big)_m\Big]_{m_{a'}}$$

$$+A\cdot\Sigma\frac{1}{(a-1)!}\times$$

$$\times\Bigg[\partial^a - \Bigg((m-m_{a'})^a \cdot \frac{\int_{x\div x'}\left(\frac{Ax+B}{Az+B}\right)^m \cdot (Az+B)^{n-1}\cdot X_z \cdot dz}{F_m}\Bigg)_m\Bigg]_{m_{a'}}$$

wo aber F_m folgende Bedeutung hat, nämlich:

$$\delta\cdots\quad F_m = A^n\cdot r^{n|-1} + A_{n-1}\cdot A^{n-1}\cdot r^{n-1|-1} + A_{n-2}\cdot A^{n-2}\cdot r^{n-2|-1} + \cdots$$

$$+A_2\cdot A^2\cdot r^{2|-1} + A_1\cdot A\cdot r + A_0;$$

während $m_{a'}$ wiederum nach und nach alle Wurzelwerthe der Gleichung $F_m = 0$ vorstellt. Auch ist dabei φ_m eine willkührliche Funktion von m mit n konstanten Koeffizienten, so daß sowohl φ_m als auch ihre Ableitungen $\partial\varphi_m$, $\partial^2\varphi_m$, ꝛc. ꝛc. für jeden der Werthe $m_{a'}$ von m, allemal beliebige willkührliche Konstanten vorstellen.

§. 375.

Auch Laplace hat ein Verfahren gegeben, um von dem allgemeinen Ur-Integral der reduzirten lineären Gleichung

$$1)\quad A_0\cdot y + A_1\cdot \partial y_x + A_2\cdot \partial^2 y_x + \cdots + \partial^n y_x = 0$$

mit konstanten oder veränderlichen Koeffizienten, welches Integral die Form

$$2)\quad y = C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_2 + C_3\cdot R_3 + \cdots + C_n\cdot R_n$$

hat, zu dem allgemeinen Ur-Integral der vollständigen lineären Gleichung

$$3)\quad A_0\cdot y + A_1\cdot \partial y_x + A_2\cdot \partial^2 y_x + \cdots + \partial^n y_x = X$$

zu gelangen. — Es gründet sich auf die Bemerkung, daß die Gleichungen (1. und 3.) allemal nach (§. 349.) einen und denselben integrirenden Faktor $z = z_x$ haben, weil solcher eine bloße Funktion von x allein ist. Nun kann man aus dem schon bekannten Integral (2.) der (1.), indem man solches n—1mal hinter einander differenziirt, und dann je n—1 der willkührlichen

Konstanten $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$ eliminirt, die n allgemeinen ersten Integrale erhalten, jedes mit einer andern willkührlichen Konstante, und daraus dann nach (§.§.344—346.) n verschiedene integrirende Faktoren $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ der (1.) finden, welche jedoch auch integrirende Faktoren der (3.) sind. Multiplizirt man nun die (3.) nach und nach mit jedem dieser integrirenden Faktoren, und integrirt man dann, so erhält man abermals n allgemeine Integrale der (3.), welche sich jedoch von den n vorher erhaltenen n allgemeinen ersten Integralen der (1.) durch nichts unterscheiden werden, als daß an die Stelle der dortigen Konstanten

$$\odot\cdots \quad C_1, \quad C_2, \quad \cdots \quad C_n$$

jetzt beziehlich die Ausdrücke

$$(\mathbb{C})\cdots \quad \int X\cdot z_1\cdot dx + c_1, \quad \int X\cdot z_2\cdot dx + c_2, \quad \cdots \int X\cdot z_n\cdot dx + c_n$$

getreten seyn werden. Eliminirt man nachgehends aus diesen n allgemeinen ersten Integralen der (3.), die $n-1$ Ausdrücke $\partial y_x, \partial^2 y_x, \partial^3 y_x, \cdots, \partial^{n-1} y_x$; so erhält man nothwendig das allgemeine Ur-Integral der (3.), welches jedoch von dem allgemeinen Ur-Integral der (1.), nämlich von

$$2) \qquad y = C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_2 + C_3\cdot R_3 + \cdots + C_n\cdot R_n$$

sich durch nichts unterscheiden kann, als nur dadurch, daß statt der willkührlichen Konstanten in $(\odot)$ jetzt die Ausdrücke in $(\mathbb{C})$ beziehlich zu stehen kommen; so daß man gerade auf diesem Wege zu der Idee des Lagrange gelangen konnte, nämlich die Konstanten in (2.) variiren zu lassen, d. h. an die Stelle dieser Konstanten jetzt Funktionen von x zu suchen, welche das Integral (2.) in das allgemeine Ur-Integral der vollständigen lineären Gleichung (3.) übergehen machen.

Beispiel. Ist danach die vollständige lineäre Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad \partial^2 y_x + a^2\cdot y = X$$

zu integriren, so findet man zuerst als Integral der reduzirten Gleichung

$$2) \qquad \partial^2 y_x + a^2\cdot y = 0,$$

diese andre $\quad 3) \qquad y = C_1\cdot \mathit{Sin}\ ax + C_2\cdot \mathit{Cos}\ ax.$

Differenzirt man nun diese, und eliminirt man dann abwechselnd C_2

und $C_{1,}$ so erhält man die beiden allgemeinen ersten Integrale

$$a \cdot C_1 = \partial y_x \cdot Cos\ ax + ay \cdot Sin\ ax$$

und

$$a \cdot C_2 = -\partial y_x \cdot Sin\ ax + ay \cdot Cos\ ax.$$

Aus diesen folgen aber sogleich die integrirenden Faktoren

$$z_1 = Cos\ ax \quad \text{und} \quad z_2 = -Sin\ ax.$$

Also ist das allgemeine Integral unserer gegebenen Gleichung jetzt dieselbe Gleichung (3), nämlich

$$y = C_1 \cdot Sin\ ax + C_2 \cdot Cos\ ax,$$

wenn man nur statt

$$C_1 \quad \text{und} \quad C_2$$

beziehlich $\int X \cdot Cos\ ax \cdot dx + c_1$ und $\int -X \cdot Sin\ ax \cdot dx + c_2$

schreibt; also daß man erhält

4) $y = Sin\ ax \cdot (\int X \cdot Cos\ ax \cdot dx + c_1) - Cos\ ax \cdot (\int X \cdot Sin\ ax \cdot dx + c_2)$

oder

5) $y = c_1 \cdot Sin\ ax + c_2 \cdot Cos\ ax + \int_{x \div x'} Sin\ a(x-z) \cdot X_z \cdot dz$

wo x' irgend ein besonderer Werth von z oder x ist.

D. Bestimmung der Konstanten in den Integralen gegebener lineärer Differenzialgleichungen, nach gegebenen Werthen der Ableitungen von y nach x.

§. 376. Aufgabe.

Man habe für die lineäre Gleichung der nten Ordnung

1) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + \partial^n y_x = X$

bereits das allgemeine Ur-Integral gefunden, nämlich

2) $y = R_0 + C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 + \cdots + C_n \cdot R_n$

mit den n willkührlichen Konstanten $C_1, C_2, \cdots C_n$. Man soll diese Konstanten $C_1, C_2, \cdots C_n$ so bestimmen, daß $y, \partial y_x, \partial^2 y_x, \partial^3 y_x$, 2c. 2c. und noch $\partial^{n-1} y_x$ für $x = \alpha$ die gegebenen, übrigens beliebigen Werthe $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots a_{n-1}$ annehmen.

Auflösung. Nehmen wir der Einfachheit wegen $n = 4$, so hat man zur Bestimmung der Konstanten die 4 Gleichungen

$$3)\quad R_1 \cdot C_1 + R_2 \cdot C_2 + R_3 \cdot C_3 + R_4 \cdot C_4 = a_0 - R_0,$$

$$4)\quad \partial R_1 \cdot C_1 + \partial R_2 \cdot C_2 + \partial R_3 \cdot C_3 + \partial R_4 \cdot C_4 = a_1 - \partial R_0,$$

$$5)\quad \partial^2 R_1 \cdot C_1 + \partial^2 R_2 \cdot C_2 + \partial^2 R_3 \cdot C_3 + \partial^2 R_4 \cdot C_4 = a_2 - \partial^2 R_0,$$

$$6)\quad \partial^3 R_1 \cdot C_1 + \partial^3 R_2 \cdot C_2 + \partial^3 R_3 \cdot C_3 + \partial^3 R_4 \cdot C_4 = a_3 - \partial^3 R_0,$$

wenn man nur in allen Funktionen von x, welche hier als Koefizienten erscheinen, den bestimmten Werth α statt x gesetzt hat.

Da aber die Gleichungen (3.—6.) nun in Bezug auf die unbekannten C_1, C_2, C_3, C_4 algebraische einfache (vom ersten Grade) sind, so finden sich diese unbekannten Werthe der Konstanten ohne weiteres.

Anmerkung. In dem besondern Falle jedoch, in welchem die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ konstant, so wie die n Wurzelwerthe der Gleichung

$$f_m = A_0 + A_1 \cdot m + A_2 \cdot m^2 + A_3 \cdot m^3 + \cdots + A_{n-1} \cdot m^{n-1} + m^n = 0$$

alle von einander verschieden und durch $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ vorgestellt sind, so daß also

$$R_1 = e^{m_1 \cdot x},\quad R_2 = e^{m_2 \cdot x},\quad R_3 = e^{m_3 \cdot x}, \cdots R_n = e^{m_n \cdot x}$$

ist, — in diesem besondern Falle also, reduziren sich dagegen für $n = 4$ die Gleichungen (3.—6.) auf

$$7)\quad e^{m_1 \cdot \alpha} \cdot C_1 + e^{m_2 \cdot \alpha} \cdot C_2 + e^{m_3 \cdot \alpha} \cdot C_3 + e^{m_4 \cdot \alpha} \cdot C_4 = a_0 - R_0,$$

$$8)\quad m_1 \cdot e^{m_1 \cdot \alpha} \cdot C_1 + m_2 \cdot e^{m_2 \cdot \alpha} \cdot C_2 + m_3 \cdot e^{m_3 \cdot \alpha} \cdot C_3 + m_4 \cdot e^{m_4 \cdot \alpha} \cdot C_4 = a_1 - \partial R_0,$$

$$9)\quad m_1^2 \cdot e^{m_1 \cdot \alpha} \cdot C_1 + m_2^2 \cdot e^{m_2 \cdot \alpha} \cdot C_2 + m_3^2 \cdot e^{m_3 \cdot \alpha} \cdot C_3 + m_4^2 \cdot e^{m_4 \cdot \alpha} \cdot C_4 = a_2 - \partial^2 R_0,$$

$$10)\quad m_1^3 \cdot e^{m_1 \cdot \alpha} \cdot C_1 + m_2^3 \cdot e^{m_2 \cdot \alpha} \cdot C_2 + m_3^3 \cdot e^{m_3 \cdot \alpha} \cdot C_3 + m_4^3 \cdot e^{m_4 \cdot \alpha} \cdot C_4 = a_3 - \partial^3 R_0.$$

Weil aber diese Gleichungen in Bezug auf die unbekannten

$$e^{m_1 \cdot \alpha} \cdot C_1,\quad e^{m_2 \cdot \alpha} \cdot C_2,\quad e^{m_3 \cdot \alpha} \cdot C_3,\quad e^{m_4 \cdot \alpha} \cdot C_4,$$

zur Linken genau dieselben sind, wie die Gleichungen (14.—17. in

Nro. II. des §. 372.) in Bezug auf die dortigen unbekannten a_1, a_2, a_3, a_4; so können diese Gleichungen hier eben so behandelt werden, wie die dortigen, und man erhält sonach

$$11) \quad C_1 = e^{-m_1 \cdot \alpha} \cdot \frac{(a-m_2)\cdot(a-m_3)\cdot(a-m_4)}{(m_1-m_2)\cdot(m_1-m_3)\cdot(m_1-m_4)},$$

$$12) \quad C_2 = e^{-m_2 \cdot \alpha} \cdot \frac{(a-m_1)\cdot(a-m_3)\cdot(a-m_4)}{(m_2-m_1)\cdot(m_2-m_3)\cdot(m_2-m_4)},$$

$$13) \quad C_3 = e^{-m_3 \cdot \alpha} \cdot \frac{(a-m_1)\cdot(a-m_2)\cdot(a-m_4)}{(m_3-m_1)\cdot(m_3-m_2)\cdot(m_3-m_4)},$$

$$14) \quad C_4 = e^{-m_4 \cdot \alpha} \cdot \frac{(a-m_1)\cdot(a-m_2)\cdot(a-m_3)}{(m_4-m_1)\cdot(m_4-m_2)\cdot(m_4-m_3)},$$

wenn man nur nicht verabsäumt, nachdem die Zähler dieser Ausdrücke durch wirkliche Multiplikation auf die Form

$$15) \quad a^3 + P' \cdot a^2 + Q' \cdot a^1 + R' \cdot a^0$$

gebracht sind, statt der Potenzen

$$a^3, \quad a^2, \quad a^1 \quad \text{und} \quad a^0$$

beziehlich $a_3 - \partial^3 R_0$, $a_2 - \partial^2 R_0$, $a_1 - \partial R_0$ und $a_0 - R_0$

zu setzen, während in R_0, ∂R_0, $\partial^2 R_0$ und $\partial^3 R_0$ bereits α statt x gesetzt worden ist. Der zu C_1 gehörige Nenner geht dann allemal aus dem Ausdruck (15.), der den Zähler von C_1 liefert, zugleich hervor, wenn man in (15.) überall m_1 statt a setzt. Das Analoge gilt dann von C_2, C_3 und C_4.

Dabei ist Nichts leichter, als dieses Verfahren auf den Fall auszudehnen, wo n nicht 4, sondern jede beliebige andre ganze Zahl ist.

§. 377. Zusatz.

Sind aber unter den Voraussetzungen der (Anmerkg. zu §. 376.) die Wurzelwerthe von $f_m = 0$ nicht alle von einander verschieden, so muß man wiederum andere Gesetze aus der Lehre der höhern Gleichungen anwenden, um durch eine analoge bequeme Rechnungsweise zum Ziele zu gelangen. Wir wollen dies jedoch gleich auf die allgemeinste Art thun.

I. Ist nämlich zunächst die Gleichung eine reduzirte

1) $A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + A_3 \cdot \partial^3 y_x + \cdots + \partial^n y_x = 0,$

und dabei

2) $f_m = A_0 + A_1 \cdot m + A_2 \cdot m^2 + A_3 \cdot m^3 + \cdots + m^n,$

so haben wir kurz vorher das allgemeine Ur-Integral so gefunden:

3) $y = \Sigma \frac{1}{(a-1)!} \left[\partial^{a-1} \left((m - m_{a'})^a \cdot \frac{e^{m.x} \cdot \varphi_m}{f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}},$

wo φ_m eine willkührliche Funktion von m ist.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn b entweder 0 oder irgend eine ganze Zahl bedeutet

4) $\partial^b y_x = \Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m - m_{a'})^a \cdot \frac{e^{m.x} \cdot \varphi_m \cdot m^b}{f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}}.$

Sollten nun für $x = \alpha$ die Werthe von

$$y_x,\ \partial y_x,\ \partial^2 y_x,\ \cdots,\ \partial^b y_x,\ \cdots,\ \partial^{n-1} y_x$$

nicht $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_b,\ \cdots,\ a_{n-1},$$

sondern die Potenzen von a, nämlich

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^b,\ \cdots\ a^{n-1}$$

werden, so daß für jedes b, obiges $\partial^b y_x = a^b$ seyn müßte, so dürfte man nur die willkührliche Funktion φ_m so nehmen, daß

5) $$\varphi_m = \frac{f_m - f_a}{m - a} \cdot e^{-m.\alpha}$$ *)

---

*) Es soll nämlich der Ausdruck in (4.) für $x = \alpha$, $= a^b$ werden für jeden Werth von b, welcher $< n$ ist; also hat man

1.1.) $\Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m - m_{a'})^a \cdot \frac{e^{m.\alpha} \cdot \varphi_m \cdot m^b}{f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}} - a^b = 0.$

Allein das Glied a^b kann man mit unter das Σ Zeichen hinein nehmen, und man erhält dann

2.2.) $\Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m - m_{a'})^a \cdot \left(\frac{e^{m.\alpha} \cdot \varphi_m}{f_m} - \frac{1}{m-a} \right) \cdot m^b \right)_m \right]_{m_{a'}} = 0,$

wird. Das allgemeine Ur-Integral (3.) geht aber dadurch über in das besondere

$$4)\quad y = \Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m-m_{a'})^a \cdot \frac{f_m - f_a}{m-a} \cdot \frac{e^{m.(x-\alpha)}}{f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}},$$

wenn hier nur statt $m_{a'}$ nach und nach alle Wurzelwerthe von $f_m = 0$ gesetzt werden, und wenn nur unter a allemal die Zahl verstanden wird, welche anzeigt, wie oft ein und derselbe Wurzelwerth $m_{a'}$ in $f_m = 0$ vorkommt.

Denkt man sich nun in diesem Integral (4.) den Ausdruck $\frac{f_m - f_a}{m-a}$, und also das Integral selbst in eine nach Potenzen von a fortlaufende Reihe

$$5)\quad y = M_0 \cdot a^0 + M_1 \cdot a^1 + M_2 \cdot a^2 + \cdots M_a \cdot a^a + \cdots + M_{n-1} \cdot a^{n-1}$$

umgeformt, dann aber statt der Potenzen

$$a^0,\quad a^1,\quad a^2,\ \cdots\ a^a,\ \cdots,\quad a^{n-1}$$

beziehlich $a_0,\quad a_1,\quad a_2,\ \cdots\ a_a,\ \cdots,\quad a_{n-1}$

gesetzt, so hat man das hier gesuchte Integral

---

wenn unter $m_{a'}$ nach und nach alle Wurzelwerthe der Gleichung $(m-a) \cdot f_m = 0$ verstanden werden. Da nun, wie wir schon im (§. 373.) zu erwähnen Gelegenheit hatten, nach der Lehre der höhern Gleichungen, hier für die höhere Gleichung $(m-a) \cdot f_m = 0$ vom $n+1$sten Grade,

$$\Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m-m_{a'})^a \cdot \frac{m^b}{(m-a) \cdot f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}} = 0$$

ist, für jeden Werth von $b < n$; so ist die Gleichung (2·2·) offenbar erfüllt, wenn man φ_m so nimmt, daß der Ausdruck

$$e^{m\alpha} \cdot \varphi_m \cdot (m-a) - f_m$$

von m unabhängig wird. Da er aber für $m = a$ den Werth $-f_a$ annimmt, so muß man natürlich solchen allemal $= -f_a$ nehmen, um allen Bedingungen genügt zu haben. — Und dies giebt das obige φ_m.

6) $y = M_0 \cdot a_0 + M_1 \cdot a_1 + M_2 \cdot a_2 + \cdots + M_a \cdot a_a + \cdots + M_{n-1} \cdot a_{n-1}$, *)

und dieses Resultat muß mit dem (§. 376. Anmerkg.) gefundenen zusammenfallen, so oft die Wurzelwerthe von f_m alle einander ungleich sind, und dabei $X = 0$ ist.

II. Ist aber X nicht $= 0$, sondern ist die gegebene Differenzialgleichung die vollständige

1) $$A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + \partial^n y_x = X,$$

und sollen die n willkührlichen Konstanten in ihrem allgemeinen Ur-Integral wiederum so bestimmt werden, daß für $x = \alpha$, die Ausdrücke

$$y,\ \partial y_x,\ \partial^2 y_x,\ \cdots,\ \partial^a y_x,\ \cdots,\ \partial^{n-1} y_x$$

beziehlich die Werthe

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_a\ \cdots,\ a_{n-1}$$

annehmen, so nimmt man das allgemeine Integral (2.) des (§. 373.), setzt statt des erstern der daselbst zur Rechten stehenden beiden Summanden, das so eben in und nach dem (§. 377. I.) gefundene Resultat (6.), während man in dem zweiten Summanden das angezeigte Integral nicht mit x′ sondern mit α anfangen läßt; so daß dasmal das für die oben stehende Differenzialgleichung (1.) gesuchte Integral folgendes wird:

---

*) Denn da die Reihe (5.) für jeden Werth von a der gegebenen Differenzialgleichung genügen muß, so genügt ihr auch jeder einzelne der Koeffizienten $M_0, M_1, M_2, \cdots\cdots M_{n-1}$, wenn solcher statt y gesetzt wird. Also genügt ihr auch die Reihe (6.), so daß also (6.) noch ein Integral der gegebenen Gleichung (1.) ist. Da aber auch die Ableitung $\partial^a y_x$ von y in (5.) für $x = \alpha$ in a^a übergeht, so wird $\partial^a (M_a)_x = 1$, dagegen $\partial^a (M_b)_x = 0$ für $x = \alpha$, man mag $b = 0, 1, 2, \cdots$ oder $= n-1$ nehmen, wenn nur nicht $b = a$ ist. Aber eben deshalb wird nun auch $\partial^a y_x$ von y in (6.) für $x = \alpha$ nothwendig $= a_a$, so daß also durch die Gleichung (6.) allen Bedingungen unserer Aufgabe genügt ist.

$$2)\quad y = \Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left((m-m_{a'})^a \cdot \frac{f_m - f_a}{m-a} \cdot \frac{e^{m.(x-\alpha)}}{f_m} \right)_m \right]_{m_{a'}}$$

$$+\Sigma \frac{1}{(a-1)!} \cdot \left[\partial^{a-1} \left(\frac{(m-m_{a'})^a}{f_m} \cdot \int_{x \div a} e^{m(x-z)} \cdot X_z \cdot dz \right)_m \right]_{m_{a'}}$$

wenn man nur den ersten Theil dieses Ausdrucks für y, nach Potenzen von a entwickelt, und in dieser Entwicklung statt der Potenzen $a^0, a^1, a^2, \cdots a^{n-1}$ beziehlich die gegebenen Werthe $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$ substituirt.

Und dieses Resultat muß mit dem (§. 376. Anmerkg.) gefundenen zusammenfallen, so oft die Wurzelwerthe von f_m alle einander ungleich sind, jeder derselben also nur einmal vorkommt.

Zweite Abtheilung.

Noch einige Fälle der Integration mehrerer gleichzeitig gegebener Differenztalgleichungen, besonders lineärer.

Vorerinnerung.

Wenn in der gemeinen Algebra aus den 4 Gleichungen

$$1)\quad x+y+z = A$$
$$2)\quad x+y+t = B$$
$$3)\quad x+z+t = C$$
$$4)\quad y+z+t = D$$

die 4 Unbekannten x, y, z, t gefunden werden sollen, so kann man methodisch verfahren, und einen der Unbekannten nach dem andern eliminiren, um zuletzt eine Gleichung zu erhalten, welche etwa x allein enthält, so daß dann x und nachher auch y, z und t gefunden werden können. — Man kann aber auch den methodischen Gang verlassen, und diese Gleichungen mit einander verbinden, ohne die successive Elimination eintreten zu lassen; man kann z. B. alle 4 Gleichungen addiren, und so die neue Gleichung

$$5)\quad x+y+z+t = \tfrac{1}{3}(A+B+C+D)$$

erhalten. Subtrahirt man nun von dieser (5.) nach und nach die Glei-

chungen (1—4.), so erhält man augenblicklich die Werthe dieser 4 Unbekannten x, y, z und t.

Solche besondere Wege, wie diesen letztern, kann man offenbar auch nur in besondereu Fällen betreten, und zwar wird man für einen andern besondern Fall auch einen andern besondern Weg aufsuchen müssen, um zu der gewünschten Auflösung zu gelangen.

Sind die 4 gegebenen Gleichungen, aus welchen die 4 Unbekannten x, y, z, t gefunden werden sollen, Differenzialgleichungen, welche noch Ableitungen von x, y, z, t nach u enthalten, so kann man dasselbe sagen. Man kann nämlich nach (§§. 281. 282. d. V. Th. d. S.) methodisch verfahren, und einen der Unbekannten nebst allen seinen Ableitungen nach dem andern eliminiren, um zuletzt eine Gleichung zu erhalten, welche nur noch x und Ableitungen von x allein (nach u) enthält; und letztere dann integriren; nachher aber nach denselben (§§. 281. 282. d. V. Th. d. S.) weiter verfahren, um auch die übrigen Unbekannten y, z, t in u ausgedrückt zu erhalten. — Weil man aber durch dieses Eliminiren zu Gleichungen von sehr hohen Ordnungen geführt werden kann, so wird man auch hier in einzelnen Fällen versuchen, ohne Elimination zum Ziele zu kommen.

Es mögen nun hier einige solche Versuche der Integration gleichzeitig gegebener Differenzialgleichungen folgen. *)

A. Von der Integration mehrerer gleichzeitig gegebenen lineären Differenzialgleichungen.

§. 378.

I. Sind zu integriren die 3 Gleichungen

$$1)\quad M\cdot u+N\cdot x+P\cdot y+Q\cdot \partial u_t+R\cdot \partial x_t+S\cdot \partial y_t = 0,$$

$$2)\quad M'\cdot u+N'\cdot x+P'\cdot y+Q'\cdot \partial u_t+R'\cdot \partial x_t+S'\cdot \partial y_t = 0,$$

$$3)\quad M''\cdot u+N''\cdot x+P''\cdot y+Q''\cdot \partial u_t+R''\cdot \partial x_t+S''\cdot \partial y_t = 0,$$

in welchen alle Koeffizienten M, M', M'', ꝛc. ꝛc. ꝛc. konstant sind, so setze man

$$4)\quad x = \alpha\cdot u, \qquad 5)\quad y = \beta\cdot u,$$

und bestimme nachgehends die konstant gedachten α und β so, daß die 3 neuen Gleichungen in eine und dieselbe zusammenfallen,

---

*) Die französischen Schriftsteller nennen diese Versuche l'intégration des équations simultanées.

nämlich in

6) $m \cdot u + \partial u_t = 0$ oder $u = C \cdot e^{-mt}$.

Hernach hat man aus (4. und 5.) auch x und y dazu gefunden.

Weil aber die Ausführung dieser Rechnungen zur Bestimmung von α, β und m die 3 Gleichungen

7) $M - Q \cdot m + (N - R \cdot m) \cdot \alpha + (P - S \cdot m) \cdot \beta = 0$,

8) $M' - Q' \cdot m + (N' - R' \cdot m) \cdot \alpha + (P' - S' \cdot m) \cdot \beta = 0$,

und 9) $M'' - Q'' \cdot m + (N'' - R'' \cdot m) \cdot \alpha + (P'' - S'' \cdot m) \cdot \beta = 0$

liefert, so erhält man aus diesen Gleichungen 3 Werthe für m, die durch m_1, m_2, m_3 vorgestellt seyn mögen; zu jedem Werth von m geben dieselben Gleichungen dann einen zugehörigen Werth von α, und einen zugehörigen Werth von β, welche beziehlich durch α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2 und β_3 bezeichnet seyn mögen.

Nimmt man daher

$$u = C_1 \cdot e^{-m_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-m_2 \cdot t} + C_3 \cdot e^{-m_3 \cdot t},$$

$$x = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{-m_1 \cdot t} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{-m_2 \cdot t} + C_3 \cdot \alpha_3 \cdot e^{-m_3 \cdot t}$$

und $$y = C_1 \cdot \beta_1 \cdot e^{-m_1 \cdot t} + C_2 \cdot \beta_2 \cdot e^{-m_2 \cdot t} + C_3 \cdot \beta_3 \cdot e^{-m_3 \cdot t},$$

so genügen diese Werthe den 3 gegebenen Gleichungen (1.—3.), enthalten aber auch 3 willkührliche Konstanten, bilden daher zugleich das allgemeine Integral der Gleichungen (1.—3.) *).

II. Sind diese andern 3 Gleichungen zu integriren, nämlich

---

*) Wenn man nämlich aus solchen lineären Gleichungen nach Vorschrift der (§.§. 281. 282. d. V. Th. d. S.) die Veränderlichen x und y nebst ihren Ableitungen eliminirt, so erhält man allemal wiederum eine lineäre Gleichung zur Bestimmung von u in t, welche aber in dem gegenwärtigen Fall von der 3ten Ordnung wird; daher nach (§. 364.) integrirt werden kann, und dann u genau so wie oben, nämlich mit 3 willkührlichen Konstanten C_1, C_2 und C_3 liefert. Und da, den (§.§. 281. 282. d. V. Th. d. S.) zu Folge, nachgehends x und y ohne neue Integration gefunden werden, so geben auch keine neuen willkührlichen Konstanten mehr ein.

1) $M \cdot u + N \cdot x + P \cdot y + (a+bt) \cdot (Q \cdot \partial u_t + R \cdot \partial x_t + S \cdot \partial y_t) = 0,$

2) $M' \cdot u + N' \cdot x + P' \cdot y + (a+bt) \cdot (Q' \cdot \partial u_t + R' \cdot \partial x_t + S' \cdot \partial y_t) = 0,$

3) $M'' \cdot u + N'' \cdot x + P'' \cdot y + (a+bt) \cdot (Q'' \cdot \partial u_t + R'' \cdot \partial x_t + S'' \cdot \partial y_t) = 0,$

wo alle Koeffizienten M, M', M'', ꝛc. ꝛc. ꝛc. wiederum konstant sind; so würde man

5) $$a+bt = b \cdot e^r$$

setzen, und statt der Ableitungen nach t, Ableitungen nach r einführen, und diese Gleichungen würden sich dann sogleich auf die in (I.) gegebenen zurückziehen. (Vgl. §. 369. VII. und Anmerk. zu §. 373.).

Man kann aber diese Verfahrungsarten (I. und II.) unmittelbar auf analoge Gleichungen zur Bestimmung von beliebig viel Funktionen von t ausdehnen. Auch ist die Anzahl der eingehenden willkührlichen Konstanten in jedem Falle ohne weitere Schwierigkeit zu bestimmen.

III. Sind zu integriren die lineären Gleichungen der 2ten Ordnung

1) $M \cdot u + N \cdot x + P \cdot \partial u_t + Q \cdot \partial x_t + R \cdot \partial^2 u_t + S \cdot \partial^2 x_t = 0,$

2) $M' \cdot u + N' \cdot x + P' \cdot \partial u_t + Q' \cdot \partial x_t + R' \cdot \partial^2 u_t + S' \cdot \partial^2 x_t = 0,$

so führe man zwei neue Veränderliche p und q dadurch ein, daß

$$\partial u_t = p \qquad \text{und} \qquad \partial x_t = q$$

gesetzt wird. Dann hat man die 4 lineären Gleichungen der 1ten Ordnung zwischen den 4 unbekannten Funktionen u, x, p, q von t und ihren Ableitungen nach t, nämlich:

3) $M \cdot u + N \cdot x + P \cdot p + Q \cdot q + R \cdot \partial p_t + S \cdot \partial q_t = 0,$

4) $M' \cdot u + N' \cdot x + P' \cdot p + Q' \cdot q + R' \cdot \partial p_t + S' \cdot \partial q_t = 0,$

3) $p - \partial u_t = 0,$

4) $q - \partial x_t = 0,$

und aus diesen Gleichungen werden nun p, q, u, x in t genau durch das Verfahren der (I.) gefunden, indem man nämlich $x = \alpha \cdot u$, $p = \beta \cdot u$, $q = \gamma \cdot u$ setzt.

IV. Sind aber die 3 nachstehenden Gleichungen der ersten

Ordnung gegeben, welche vollständige genannt werden können, nämlich:

1) $M \cdot u + N \cdot x + P \cdot y + Q \cdot \partial u_t + R \cdot \partial x_t + S \cdot \partial y_t = T_x$,

2) $M' \cdot u + N' \cdot x + P' \cdot y + Q' \cdot \partial u_t + R' \cdot \partial x_t + S' \cdot \partial y_t = T'_x$,

3) $M'' \cdot u + N'' \cdot x + P'' \cdot y + Q'' \cdot \partial u_t + R'' \cdot \partial x_t + S'' \cdot \partial y_t = T''_x$;

so kann man auch hier wieder zuerst dieselben Gleichungen integriren unter der Voraussetzung, daß 0 (Null) statt T, T' und T'' geschrieben wird, dann aber in dem Integral dieser letztern Gleichungen

4) $u = C_1 \cdot u_1 + C_2 \cdot u_2 + C_3 \cdot u_3$,

5) $x = C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + C_3 \cdot x_3$,

6) $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3$

(wo u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 gefundene Funktionen von t seyn werden), C_1, C_2, C_3 als solche Funktionen von x dazu suchen, daß die Gleichungen (4.—6.) den gegebenen Gleichungen (1.—3.) genügen.

Man findet dann zur Bestimmung von ∂C_1, ∂C_2, ∂C_3 die 3 Gleichungen

7) $(Q \cdot u_1 + R \cdot x_1 + S \cdot y_1) \cdot \partial C_1 + (Q \cdot u_2 + R \cdot x_2 + S \cdot y_2) \cdot \partial C_2 + (Q \cdot u_3 + R \cdot x_3 + S \cdot y_3) \cdot \partial C_3 = T$;

8) $(Q' \cdot u_1 + R' \cdot x_1 + S' \cdot y_1) \cdot \partial C_1 + (Q' \cdot u_2 + R' \cdot x_2 + S' \cdot y_2) \cdot \partial C_2 + (Q' \cdot u_3 + R' \cdot x_3 + S' \cdot y_3) \cdot \partial C_3 = T'$;

9) $(Q'' \cdot u_1 + R'' \cdot x_1 + S'' \cdot y_1) \cdot \partial C_1 + (Q'' \cdot u_2 + R'' \cdot x_2 + S'' \cdot y_2) \cdot \partial C_2 + (Q'' \cdot u_3 + R'' \cdot x_3 + S'' \cdot y_3) \cdot \partial C_3 = T''$;

welche letzteren beiden sich von der (7.) nur dadurch unterscheiden, daß die Koeffizienten Q, R, S in (8.) mit einem, in (9.) aber mit zwei Strichen versehen sind. — Aus diesen 3 Gleichungen (7.—9.) findet man dann

$$\partial C_1 = X_1; \quad \partial C_2 = X_2; \quad \text{und} \quad \partial C_3 = X_3;$$

und daraus wieder

$$C_1 = \int X_1 \cdot dx + c_1; \quad C_2 = \int X_2 \cdot dx + c_2; \quad C_3 = \int X_3 \cdot \partial x + c_3$$

V. Sind gegeben die lineären Gleichungen der zweiten Ordnung

$$1)\quad M\cdot u+N\cdot x+P\cdot\partial u_t+Q\cdot\partial x_t+R\cdot\partial^2 u_t+S\cdot\partial^2 x_t = T_t,$$

$$2)\quad M'\cdot u+N'\cdot x+P'\cdot\partial u_t+Q'\cdot\partial x_t+R'\cdot\partial^2 u_t+S'\cdot\partial^2 x_t = T'_t,$$

und hat man, unter der Voraussetzung, daß $T_t = T_t' = 0$ ist,

$$3)\quad u = C_1\cdot u_1+C_2\cdot u_2+C_3\cdot u_3+C_4\cdot u_4$$

und

$$4)\quad x = C_1\cdot x_1+C_2\cdot x_2+C_3\cdot x_3+C_4\cdot x_4$$

bereits gefunden, und sucht man nun für C_1, C_2, C_3, C_4 diejenigen Funktionen von t, welche bewirken, daß die Gleichungen (3. und 4.) zu gleicher Zeit die allgemeinen Integrale sind der Gleichungen (1. u. 2.) für jede T_t und T_t'; so findet man zunächst, damit ∂u_t und ∂x_t in beiden Fällen, wo C_1, C_2, C_3, C_4 konstant oder Funktionen von t sind, der Form nach dieselben werden, die Gleichungen

$$5)\quad u_1\cdot\partial C_1+u_2\cdot\partial C_2+u_3\cdot\partial C_3+u_4\cdot\partial C_4 = 0$$

und

$$6)\quad x_1\cdot\partial C_1+x_2\cdot\partial C_2+x_3\cdot\partial C_3+x_4\cdot\partial C_4 = 0.$$

Findet man dann $\partial^2 u_t$ und $\partial^2 x_t$, und substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (1. und 2.), so gehen diese über in

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l}(R\cdot\partial u_1+S\cdot\partial x_1)\cdot\partial C_1+(R\cdot\partial u_2+S\cdot\partial x_2)\cdot\partial C_2\\ +(R\cdot\partial u_3+S\cdot\partial x_3)\cdot\partial C_3+(R\cdot\partial u_4+S\cdot\partial x_4)\cdot\partial C_4\end{array}\right\} = T,$$

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l}(R'\cdot\partial u_1+S'\cdot\partial x_1)\cdot\partial C_1+(R'\cdot\partial u_2+S'\cdot\partial x_2)\cdot\partial C_2\\ +(R'\cdot\partial u_3+S'\cdot\partial x_3)\cdot\partial C_3+(R'\cdot\partial u_4+S'\cdot\partial x_4)\cdot\partial C_4\end{array}\right\} = T'.$$

Aus den 4 Gleichungen (5.—8.) findet man nun sogleich auf einfachem algebraischen Wege die 4 Unbekannten

∂C_1, ∂C_2, ∂C_3, ∂C_4, und daraus C_1, C_2, C_3, C_4 als Funktionen von t, jede mit einer neuen willkührlichen Konstante.

VI. Die Rechnungen in (IV.) vereinfachen sich noch, wenn man zuvor aus den Gleichungen in (IV.) 3 neue Gleichungen zieht von der Form

$$\partial u_t + (M_1 \cdot u + N_1 \cdot x + Q_1 \cdot y) = T_1,$$
$$\partial x_t + (M'_1 \cdot u + N'_1 \cdot x + Q'_1 \cdot y) = T'_1,$$
$$\partial y_t + (M''_1 \cdot u + N''_1 \cdot x + Q''_1 \cdot y) = T''_1,$$

und diese dann erst nach jener Vorschrift behandelt. Ebenso vereinfachen sich aber auch die Rechnungen in (V.), wenn man aus den beiden Gleichungen daselbst erst neue Gleichungen zieht von der Form

$$\partial^2 u_t + (P_1 \cdot \partial u_t + Q_1 \cdot \partial x_t) + (M_1 \cdot u + N_1 \cdot x) = T_1,$$
$$\partial^2 x_t + (P_1' \cdot \partial u_t + Q_1' \cdot \partial x_t) + (M_1' \cdot u + N_1' \cdot x) = T_1',$$

und diese dann erst der in (V.) beschriebenen Behandlung unterwirft.

VII. Endlich sieht man, wie dies alles leicht auf m lineare Gleichungen zwischen m+1 Veränderlichen (d. h. zur Bestimmung von m abhängigen Veränderlichen in den m+1sten als unabhängig gedachten Veränderlichen ausgedrückt) erweitert und ausgedehnt werden kann.

§. 379.

Man konnte auch auf die Aufgaben (IV. u. V. des §. 378.) leicht das Verfahren des Laplace ausdehnen, welches wir (§. 375.) gelehrt haben. Weil aber solches zu verwickelten Eliminationen führt, so mag hier lieber noch das von Ampère dargestellte Verfahren des d'Alembert mitgetheilt werden, welches eine einfachere Rechnung zu erfordern scheint.

I. Man bringt nämlich die beiden gegebenen Gleichungen der 1sten Ordnung zuvor nach (§. 378. VI.) auf die Form

1) $$\partial u_t + P \cdot u + Q \cdot x = T,$$

2) $$\partial x_t + P' \cdot u + Q' \cdot x = T',$$

multiplizirt dann die (2.) mit einer unbestimmten Funktion Θ, addirt das Produkt zur erstern, und erhält

3) $$\partial u_t + \Theta \cdot \partial x_t + (P + P' \cdot \Theta) \cdot u + (Q + Q' \cdot \Theta) \cdot x = T + \Theta \cdot T'.$$

Dann führt man ausser Θ noch einen neuen Veränderlichen z ein durch die Gleichung

4) $u+x\cdot\Theta = z$, also daß $\partial u_t+\Theta\cdot\partial x_t+x\cdot\partial\Theta_t = \partial z_t$ wird, eliminirt aus (3. u. 4.) u und ∂u_t, und erhält

5) $\partial z_t+(P+P'\cdot\Theta)\cdot z-x\cdot\partial\Theta_t-\big((P+P'\cdot\Theta)\cdot\Theta-(Q+Q'\cdot\Theta)\big)\cdot x = T+T'\cdot\Theta.$

Dieſe Gleichung zerfällt nun, da Θ willkührlich angenommen werden kann, in die beiden

6) $$\partial\Theta_t+(P+P'\cdot\Theta)\cdot\Theta-(Q+Q'\cdot\Theta) = 0$$

7) $$\partial z_t+(P+P'\cdot\Theta)\cdot z = T+T'\cdot\Theta.$$

Kann man nun einen, der Gleichung (6.) genügenden Werth von Θ finden, ſo giebt die (7.), da ſie eine lineäre Gleichung der erſten Ordnung iſt, ohne weiteres z dazu. Die Gleichung (4.) geht dann in eine Gleichung zwiſchen x, u und t über, giebt alſo x in u und t oder u in x und t ausgedrückt, ſo daß dann die (1. oder 2.) u oder x, in t ausgedrückt, dazu liefert. Die Koefizienten P, Q, P′, Q′ mögen übrigens konſtant oder veränderlich ſeyn, wenn ſie nur im letztern Fall Funktionen von t allein ſind.

Findet man zwei der Gleichung (6.) genügende Werthe von Θ, ſo giebt die (7.) zwei Werthe von z dazu, und die Gleichung (4.) liefert dann 2 Gleichungen zwiſchen x, u und t, ſo daß ſich dann ſogleich ſowohl x als auch u in t ausgedrückt ergiebt.

Sind die Koeffizienten P, Q, P′, Q′ konſtant, ſo genügt der Gleichung (6.) ein konſtanter, aus

1.1.) $$(P+P'\cdot\Theta)\cdot\Theta-(Q+Q'\cdot\Theta) = 0$$

gezogener Werth von Θ. Die Gleichung (7.) integrirt, giebt nun, wenn man der Kürze wegen

2.2.) $P+P'\cdot\Theta = m$ und $T+T'\cdot\Theta = V$ ſetzt,

3.3.) $$u+\Theta\cdot x = e^{-m\cdot t}\cdot\int e^{m\cdot t}\cdot V\cdot dt+C,$$

und dieſe Gleichung giebt ſogleich zwei verſchiedene Gleichungen, wenn man ſtatt Θ nach und nach einen jeden der beiden aus (1.1.) gezogenen Werthe Θ_1 und Θ_2 von Θ ſubſtituirt. Wenn man dann nur nicht überſieht, daß in dieſen beiden Gleichungen auch verſchiedene willkühr-

liche Konstanten statt C gesetzt werden müssen, so erhält man aus ihnen sogleich u und x in t und zwei willkührlichen Konstanten.

II. Sind 3 solche Gleichungen gegeben, aber bereits (nach VI. §. 378.) auf die nachstehende Form gebracht

1) $\partial u_t + (P \cdot u + Q \cdot x + R \cdot y) = T;$

2) $\partial x_t + (P' \cdot u + Q' \cdot x + R' \cdot y) = T';$

3) $\partial y_t + (P'' \cdot u + Q'' \cdot x + R'' \cdot y) = T'';$

so multiplizirt man die (2.) mit Θ, die (3.) mit Θ', und addirt alle 3 Gleichungen; setzt dann

4) $u + \Theta \cdot x + \Theta' \cdot y = z,$

eliminirt u und ∂u_t aus (4.) und der so eben erhaltenen Summe aller 3 Gleichungen, und man erhält eine Gleichung, welche sogleich in diese 3 Gleichungen zerfällt, nämlich in

5) $\partial \Theta_t + (P + P' \cdot \Theta + P'' \cdot \Theta') \cdot \Theta - (Q + Q' \cdot \Theta + Q'' \cdot \Theta') = 0,$

6) $\partial \Theta_t' + (P + P' \cdot \Theta + P'' \cdot \Theta') \cdot \Theta' - (R + R' \cdot \Theta + R'' \cdot \Theta') = 0$

und

7) $\partial z_t + (P + P' \cdot \Theta + P'' \cdot \Theta') \cdot z = T + T' \cdot \Theta + T'' \cdot \Theta'.$

Gelingt es nun aus den Gleichungen (5. u. 6.) Werthe für Θ und Θ' zu finden, welche genügen; so liefert die (7.) sogleich z dazu, und die Rechnung kann wie in (I.) fortgesetzt werden, um zuletzt u, x und y in t zu haben.

Sind die Koeffizienten P, Q, R, P', ꝛc. ꝛc. konstant, so genügen den Gleichungen (5. u. 6.) die konstanten Werthe von Θ und Θ', welche aus

8) $(P + P' \cdot \Theta + P'' \cdot \Theta') \cdot \Theta - (Q + Q' \cdot \Theta + Q'' \cdot \Theta') = 0$

und

9) $(P + P' \cdot \Theta + P'' \cdot \Theta') \cdot \Theta' - (R + R' \cdot \Theta + R'' \cdot \Theta') = 0$

hervorgehen. Hier gelangt man aber zu kubischen Gleichungen, so daß man 3 Paare zusammengehöriger Werthe von Θ und Θ' finden wird, welche der (8. u. 9.) genügen. Dann erhält man auch 3 zugehörige Werthe von z aus (7.), so daß die (4.) jetzt 3 solche Gleichungen liefert, aus denen dann u, x und y in t sogleich gefunden werden.

Anmerkg. 1. Man kann diese Methode auf beliebig viel Gleichungen von beliebiger Ordnung ausdehnen, indem man wie in (III. §. 378.) neue Veränderliche einführt, so daß man lauter Gleichungen vom ersten Grade bekommt. D'Alembert hat diese Methode sogar auf die Integration einer einzigen lineären Gleichung einer höhern Ordnung angewandt. Ist nämlich gegeben die Gleichung der 3ten Ordnung

$$1) \qquad \partial^3 y_t + P\cdot\partial^2 y_t + Q\cdot\partial y_t + R\cdot y = T_t,$$

so führt man zwei neue Veränderliche x und u so ein, daß

$$2) \qquad \partial y_t - x = 0 \qquad \text{und} \qquad 3) \qquad \partial x_t - u = 0$$

wird; und die gegebene Gleichung (1.) nimmt dann sogleich die Form

$$4) \qquad \partial u_t + (P\cdot u + Q\cdot x + R\cdot y) = T$$

an, so daß die 3 Gleichungen (2. 3. und 4.) nun sogleich nach dem vorstehenden (§. 379.) behandelt werden können.

Anmerkg. 2. Man kann auch noch folgendes Verfahren bemerken, um z. B. zwei lineäre Gleichungen

$$1) \quad X = \left\{ \begin{array}{l} A_0\cdot y + A_1\cdot\partial y_x + A_2\cdot\partial^2 y_x + \cdots + A_{n-1}\cdot\partial^{n-1} y_x + A_n\cdot\partial^n y_x \\ + B_0\cdot z + B_1\cdot\partial z_x + B_2\cdot\partial^2 z_x + \cdots + B_{n-1}\cdot\partial^{n-1} z_x + B_n\cdot\partial^n z_x \end{array} \right\}$$

$$2) \quad X' = \left\{ \begin{array}{l} P_0\cdot y + P_1\cdot\partial y_x + P_2\cdot\partial^2 y_x + \cdots + P_m\cdot\partial^m y_x \\ + Q_0\cdot z + Q_1\cdot\partial z_x + Q_2\cdot\partial^2 z_x + \cdots + Q_m\cdot\partial^m z_x \end{array} \right\}$$

wo $n > m$ seyn mag, gleichzeitig zu integriren. — Man multiplizirt nämlich die erste mit Θ, die andere mit Θ', und addirt beide Gleichungen, und man erhält

$$3) \quad X\cdot\Theta + X'\cdot\Theta' =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_0\cdot\Theta + P_0\cdot\Theta')\cdot y + \cdots + (A_m\cdot\Theta + P_m\cdot\Theta')\cdot\partial^m y_x + \cdots + A_n\cdot\Theta\cdot\partial^n y_x \\ + (B_0\cdot\Theta + Q_0\cdot\Theta')\cdot z + \cdots + (B_m\cdot\Theta + Q_m\cdot\Theta')\cdot\partial^m z_x + \cdots + B_n\cdot\Theta\cdot\partial^n z_x \end{array} \right\}.$$

Kann man nun Funktionen von x als Werthe von Θ und Θ' finden (und wie dies geschieht, lehrt §. 397. in dem nächstfolgenden Kapitel), für welche aus der Gleichung (3.) eine neue Gleichung

4) $$G = 0$$

abgeleitet werden kann, so daß $\partial G_{(x)} = 0$ oder $\partial G = 0$ mit der (3.) zusammenfällt, während G eine Funktion von

$$x,\ y,\ \partial y_x, \cdots \partial^{n-1} y_x,\ z,\ \partial z_x, \cdots \partial^{n-1} z_x$$

ist, und gelingt es 2n Paare solcher Werthe von Θ und Θ' zu finden, also 2n solcher Gleichungen wie die (4.) zu erhalten; so kann man dann aus diesen letztern 2n Gleichungen die 2n—2 Ableitungen $\partial y_x, \partial^2 y_x, \cdots \partial^{n-1} y_x, \partial z_x, \partial^2 z_x, \cdots \partial^{n-1} z_x$ eliminiren, und es werden zuletzt zwei Urgleichungen übrig seyn, welche y und z in x ausgedrückt liefern.

Es ist aber in Bezug auf dieses Verfahren nöthig, daß man die Lehren des nächsten Kapitels zu Hilfe nimmt.

B. Von der gleichzeitigen Integration einiger anderen, nicht lineären, Gleichungen.

§. 380.

Betrachten wir nun nächst den lineären Gleichungen auch noch einige andere Fälle.

I. Es sind gegeben die beiden Gleichungen

1) $$\partial z_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$$

und 2) $$f_{x,y,z} = 0,$$

unter der Voraussetzung jedoch, daß $f_{x,y,z}$ eine homogene Funktion von x, y und z ist. Statt nun die (2.) zu differenziiren, um dann aus allen 3 Gleichungen z und ∂z_x elimininen zu können, und so die Endgleichung zwischen x, y und ∂y_x zu erhalten, welche dann noch integrirt werden müßte, verfährt man in diesem besonderen Falle lieber wie folgt:

Man führt 2 neue Veränderliche u und v ein durch die Gleichungen

3) $y = u \cdot x$ und 4) $z = v \cdot x$,

so verschwindet aus (2.) durch diese Substitution, der Veränderliche x, so daß man bloß eine Gleichung zwischen v und u erhält, welche durch

5) $\psi_{u,v} = 0$,

bezeichnet seyn mag. Giebt man nun der (1.) die Form

6) $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial z$,

wo sich alle ∂ auf irgend einen beliebigen Veränderlichen beziehen, und setzt man hier herein statt ∂y und ∂z die Werthe, welche aus (3. und 4.) dafür hervorgehen, nämlich

7) $\partial y = u \cdot \partial x + x \cdot \partial u$; 8) $\partial z = v \cdot \partial x + x \cdot \partial v$,

und zieht man aus (5.) durch algebraisches Auflösen und nachheriges Differenziiren

9) $v = v_u$ und 10) $\partial v = \partial v_u \cdot \partial u$:

so erhält man sogleich, wenn aus (6.—10.) die 4 Ausdrücke ∂y, ∂z, v und ∂v eliminirt werden,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(1 - \partial v_u^2) \cdot \partial u}{v_u \cdot \partial v_u - u + \sqrt{(v_u - u \cdot \partial v_u)^2 - 1 + \partial v_u^2}}$$

$$= \frac{(v_u \cdot \partial u_u - u - \sqrt{(v_u - u \cdot \partial v_u)^2 - 1 + \partial v_u^2}) \cdot \partial u}{1 + u^2 - v_u^2}.$$

Nimmt man nun links und rechts die Integrale, so ergiebt sich

$$11) \quad log\, x = log\, c - log \sqrt{1 + u^2 - v_u^2} - \int \frac{\sqrt{(v_u - u \cdot \partial v_u)^2 - 1 + \partial v_u^2}}{1 + u^2 - v_u^2} \cdot du.$$

Da man nun, wenn durch diese Gleichung u, also dann auch $v = v_u$ in x ausgedrückt ist, aus $y = u \cdot x$ und $z = v \cdot x$, augenblicklich auch y und z in x ausgedrückt hat, mit einer willkührlichen Konstante b, so hat man die Gleichungen (1. u. 2.) vereint integrirt.

Beispiel 1. Ist z. B. die Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ in einem besonderen Falle diese, nämlich

$$z = a \cdot x + b \cdot y,$$

so erhält man $v = a + b \cdot u$, also $\partial v_u = b$,

und die Gleichung (11.) wird daher jetzt

$$log\, x = log\, c - log \sqrt{1 + u^2 - (a+bu)^2} - \int \frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{1+u^2-(a+bu)^2} \cdot du$$

oder

$$\frac{x^2+y^2-(ax+by)^2}{c^2} = \frac{(b^2-1)\cdot y + ab\cdot x - x\cdot\sqrt{a^2+b^2-1}}{(b^2-1)\cdot y + ab\cdot x + x\cdot\sqrt{a^2+b^2-1}},$$

welche Gleichung, auf Null gebracht, sich noch in zwei Faktoren zerlegt, und daher giebt

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{entweder} & (b^2-1)\cdot y + ab\cdot x + x\cdot\sqrt{a^2+b^2-1} = c\cdot\sqrt{1-b^2} \\ \text{oder} & (b^2-1)\cdot y + ab\cdot x - x\cdot\sqrt{a^2+b^2-1} = 0 \end{array}\right\},$$

wo man statt $c\cdot\sqrt{1-b^2}$ auch bloß C schreiben kann. Da jedoch die Quadratwurzel $\sqrt{a^2+b^2-1}$ zwei Werthe hat, so ist die zweite dieser Gleichungen, für $C = 0$, schon in der ersten enthalten, so daß man das Endresultat auch so schreiben kann, nämlich

$$(b^2-1)\cdot y + ab\cdot x \pm x\cdot\sqrt{a^2+b^2-1} = C. \text{ *)}$$

Beispiel 2. Ist die zwischen z, x und y gegebene Gleichung diese

$$z^2 = y^2 + n\cdot x^2,$$

so wird $v = \sqrt{u^2+n}$, also $\partial v_u = \frac{u}{\sqrt{u^2+n}}$.

Demnach ist die Gleichung (11.) jetzt

$$log\, x = log\, c + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot log\,(u + \sqrt{u^2+n});$$

oder

$$x = c \cdot \left(\frac{y+\sqrt{y^2+n\cdot x^2}}{x}\right)^{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}.$$

---

*) Zu den hier im Texte behandelten beiden Gleichungen wird man aber geführt, wenn z. B. zwischen dem Bogen z und den rechtwinklichen Koordinaten x und y des Endpunktes desselben Bogens irgend eine homogene Gleichung gegeben ist, und nun die Kurve gesucht wird, welche dieser gegebenen Relation entspricht. — Dies Resultat des Beispiels zeigt zwei gerade Linien statt der gesuchten Kurve.

Für $n = 1$ müßte man die Integration besonders vornehmen, und man würde dann

$$y = c \cdot x$$

erhalten. — *) Auch für $n = 0$ muß das Integral besonders gefunden werden.

II. Wären gegeben die Gleichungen

$$1) \quad \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial z \quad \text{oder} \quad \sqrt{\partial x_z{}^2 + \partial y_z{}^2} = 1$$

und $$2) \quad f_{x,y,\partial x_z,\partial y_z,\partial^2 x_z,\partial^2 y_z,\ldots \partial^n x_z,\partial^n y_z} = 0,$$

so daß in (2.) kein z vorkommt, so würde man am besten thun, die Ableitungen nach z in solche nach x zu verwandeln, indem man (nach §. 60. d. III. Th. d. S.) hat:

$$\partial x_z = \frac{1}{\partial z_x}; \quad \partial^2 x_z = -\frac{\partial^2 z_x}{\partial z_x{}^3}; \quad \text{u. s. w. f.;}$$

aber auch nach (§. 58. d. 3. Th. d. S.)

$$\partial y_z = \frac{\partial y_x}{\partial z_x}; \quad \partial^2 y_z = \frac{\partial z_x \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x \cdot \partial^2 z_x}{\partial z_x{}^3}, \text{ u. s. w. f.;}$$

und man wird dann, wenn die Gleichung (1.) jetzt

$$3) \qquad \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} = \partial z_x,$$

selber noch nach allem x differenziirt wird, Gleichungen genug erhalten, um ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ꝛc. ꝛc. aus der so umgeformten (2.) eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen x, y und ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\ldots$ $\partial^n y_x$ erhalten zu können, so daß man nun diese letztere nur noch integriren darf, um y in x, und dann aus (3.) auch sogleich

$$z = \int (\sqrt{1 + \partial y_x{}^2}) \cdot dx$$

d. h. auch z in x ausgedrückt zu haben. — In dem besondern

---

*) Dieses Resultat spricht offenbar diejenige Eigenschaft analytisch aus, welche in den Elementen der Geometrie den Namen des Pythagorischen Lehrsatzes zu tragen pflegt. — Es sagt aber auch, daß nur der geraden Linie

$$y = c \cdot x$$

diese Eigenschaft zukommt.

Fall, wo man noch überdies voraussetzt, daß die gegebene Gleichung (2.) auch kein y enthalte, sondern bloß x, kann man die Endgleichung zwischen x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ꝛc. ꝛc. noch überdieß sogleich um einen Grad niedriger machen, wenn man einen neuen Veränderlichen v dadurch einführt, daß

$$\partial y_x = v \qquad \text{gesetzt wird.}$$

Und sollte die Gleichung (2.) nicht nur kein z, sondern auch kein x enthalten, also bloß y, so dürfte man nur statt der Ableitungen nach z lauter Ableitungen nach y einführen, übrigens ganz den eben beschriebenen Weg verfolgen, um zuletzt eine Gleichung zwischen y, ∂x_y, $\partial^2 x_y$, $\partial^n x_y$ zu haben, welche sogleich um einen Grad niedriger wird, wenn man einen neuen Veränderlichen v so einführt, daß man $\partial x_y = v$ setzt.

Man sieht übrigens leicht ein, daß sich diese letztere Methode zu integriren, allemal anwenden läßt, so oft die Gleichung (1.) selber bloß irgend eine Gleichung zwischen ∂x, ∂y und ∂z ist, ohne x, y oder z selbst zu enthalten.

Beispiel. Es seyen gegeben die Gleichungen

1) $$\sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \partial x_z^2 + \partial y_z^2 = 1,$$

$$\text{oder} \quad \partial x^2 + \partial y^2 = \partial z^2$$

und

2) $$\frac{\partial y_z \cdot \sqrt{\partial x_z^2 + \partial y_z^2}}{\partial^2 x_z} = a \cdot \frac{1}{Tg} \frac{\partial y_z}{\partial x_z}.$$

Setzt man hier in (2.) $\frac{\partial y_x}{\partial z_x}$ statt $\partial y_{z'}$ und $\frac{1}{\partial z_x}$ statt $\partial x_{z'}$ so wie $\frac{-\partial^2 z_x}{\partial z_x^3}$ statt $\partial^2 x_{z'}$ so erhält man aus (2.) sogleich:

3) $$-\frac{\partial y_x \cdot \partial z_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}}{\partial^2 z_x} = a \cdot \frac{1}{Tg} \partial y_x.$$

Differenziirt man nun die (1.) nach allem x, nachdem man sie vorher so geschrieben hat

4) $$1 + \partial y_x^2 = \partial z_x^2;$$

so erhält man

5) $\partial y_x \cdot \partial^2 y_x = \partial z_x \cdot \partial^2 z_x$;

und werden nun aus (3. 4. und 5.) die ∂z_x und $\partial^2 z_x$ eliminirt, so ergiebt sich als Endgleichung zwischen x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ folgendes:

6) $$-\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = a \cdot \frac{1}{Tg} \partial y_x.$$

Führt man nun hier den neuen Veränderlichen v so ein, daß

7) $$\partial y_x = v$$

wird, so geht die (6.) über in

8) $$-\frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial v_x} = a \cdot \frac{1}{Tg} v,$$

oder

9) $$\partial x_v = -\frac{a}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{Tg} v,$$

so wie dann, weil $\partial y_v = \partial y_x \cdot \partial x_v = v \cdot \partial x_v$ ist,

10) $$\partial y_v = \frac{-a \cdot v}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{Tg} v$$

wird, woraus nun x und y in v ausgedrückt gefunden werden, nämlich

$$x = \frac{-a}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} \cdot \frac{1}{Tg} v + C,$$

$$y = \frac{-av}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{a}{\sqrt{1+v^2}} \cdot \frac{1}{Tg} v + C'.$$

In diesem besonderen Beispiele konnte man auch die Rechnungen verändern, indem man aus (1. und 2.) sogleich ∂x_z eliminirte, um zu erhalten

$$\frac{\partial y}{\partial^2 x} = a \cdot \frac{1}{Tg} \frac{\partial y}{\partial x} = a \cdot \frac{1}{Tg} \partial y_x;$$

wo sich alle bloßen ∂ auf z beziehen. Hernach konnte man sogleich

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ oder } \partial y_x = v$$

setzen, und die Gleichungen (1. u. 2.) gingen über in

1') $$\partial x \cdot \sqrt{1+v^2} = 1$$

und

2') $$\frac{\partial y}{\partial^2 x} = a \cdot \frac{1}{Tg} v.$$

Differenziirt man nun die (1′.) nach allem z, so erhält man

$$3') \quad \partial^2 x \cdot \sqrt{1+v^2} + \partial x \cdot \frac{v \cdot \partial v}{\sqrt{1+v^2}} = 0,$$

woraus $$4') \quad \partial^2 x = -\frac{v \cdot \partial x \cdot \partial v}{1+v^2}$$

hervorgeht. Setzt man diesen Werth statt $\partial^2 x$ in die (2′.), so geht letztere über in

$$5') \quad -\frac{\partial y \cdot (1+v^2)}{v \cdot \partial x \cdot \partial v} = a \cdot \frac{1}{Tg} v,$$

wo alle bloßen ∂ sich auf z beziehen. Setzt man aber hier statt ∂x den Werth aus (1′.), so wie statt ∂y den Werth $v \cdot \partial x$, so erhält man aus (5′.) jetzt

$$6') \quad -\frac{\partial x \cdot (1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial v} = a \cdot \frac{1}{Tg} v,$$

während nun statt $\frac{\partial x}{\partial v}$ auch ∂x_v geschrieben werden kann, so daß man das obige Resultat (9.) wiederum erhält.

Man konnte auch, was natürlicher war, in (5′.) statt $\frac{\partial y}{\partial x}$ sogleich v setzen, so daß man erhielt

$$-\frac{(1+v^2)}{\partial v} = a \cdot \frac{1}{Tg} v;$$

mußte aber dann $\partial v_z = \partial v_x \cdot \partial x_z$ d. h. $\partial v = \partial v_x \cdot \partial x$ nehmen, und dann ∂x dadurch wegschaffen, daß man aus (1′.) seinen Werth dafür setzte.

Dritte Abtheilung.

Noch einige besondere Betrachtungen über das Auffinden der integrirenden Faktoren.

A. Versuche, den integrirenden Faktor aus bekannten besondern Integralen und singulären Werthen zu finden.

§. 381. Lehrsätze.

Wenn z ein integrirender Faktor der gegebenen Differenzialgleichung der 1ten Ordnung

1) $M+N\cdot\partial y_x = 0$ oder $M\cdot\partial x_y+N = 0$

iſt, ſo iſt jeder Werth y in x (oder x in y), welcher

2) $z = 0$

oder 3) $z = \frac{1}{0}$ d. h. $\frac{1}{z} = 0$, d. h. $u = 0$

macht, wenn

4) $\frac{1}{z} = u$, alſo $z = \frac{1}{u}$

geſetzt wird, ein beſonderes Integral oder ein ſingulärer Werth der (1.).

Beweis. Denn da

5) $z\cdot M+z\cdot N\cdot\partial y_x$

oder auch 6) $\frac{1}{u}\cdot M+\frac{1}{u}\cdot N\cdot\partial y_x$

integrabel iſt, ſo hat man die Bedingungsgleichungen der Integrabilität

7) $\partial(z\cdot M)_y = \partial(z\cdot N)_x$

und 8) $\partial\left(\frac{1}{u}\cdot M\right)_y = \partial\left(\frac{1}{u}\cdot N\right)_x$

d. h. 9) $z\cdot(\partial M_y-\partial N_x)+M\cdot\partial z_y-N\cdot\partial z_x = 0$

und 10) $-u\cdot(\partial M_y-\partial N_x)+M\cdot\partial u_y-N\cdot\partial u_x = 0$

erfüllt. Alſo machen, wie aus (9. u. 10.) in die Augen fällt, die Werthe y in x (oder x in y), welche beziehlich den Gleichungen

2) $z = 0$ oder 3) $u = 0$,

alſo auch beziehlich den Differenzialgleichungen der (2.) oder (3.), nämlich den Gleichungen

11) $\partial z_x+\partial z_y\cdot\partial y_x = 0$ oder 12) $\partial u_x+\partial u_y\cdot\partial y_x = 0$

genügen, die nicht mit z oder u affizirten Theile der (9. oder 10.) für ſich identiſch der Null gleich; alſo daß man für dieſe Werthe hat beziehlich die Gleichungen

13) $M\cdot\partial z_y-N\cdot\partial z_x = 0$ oder 14) $M\cdot\partial u_y-N\cdot\partial u_x = 0$,

alſo auch die Gleichung, welche aus (11. und 13.) durch Elimination

von ∂z_x, oder aus (12. und 14.) durch Elimination von ∂u_x hervorgeht, und welche keine andre als die gegebene Differenzialgleichung (1.) ist.

Jeder Werth y in x (oder x in y), welcher aber einer gegebenen Differenzialgleichung genügt, ist entweder ein Integral oder ein singulärer Werth. *)

Anmerkung. Aus dem Beweise dieses Satzes geht aber hervor, daß er in allen den Fällen eine Ausnahme leiden könne, in welchen die Werthe y in x (oder x in y), welche $z = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ machen, zu gleicher Zeit einen der beiden Ausdrücke ∂M_y oder ∂N_x ebenfalls auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, weil dann die Producte

$$z\cdot(\partial M_y - \partial N_x) \quad \text{oder} \quad u\cdot(\partial M_y - \partial N_x)$$

für $z = 0$ oder $u = 0$ nicht nothwendig selber verschwinden müssen.

§. 382.

Aus diesem Satze hat nun Trembley den richtigen Schluß gezogen, daß wenn

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Gleichungen sind, welche einer gegebenen Differenzialgleichung der 1ten Ordnung genügen, die Ausdrücke f, f_1, f_2, ꝛc. ꝛc. in den integrirenden Multiplikator als Faktoren oder als Divisoren eingehen können.

Er sucht also mehrere besondere Integrale der gegebenen Diffe-

---

*) Man vergleiche übrigens damit (§. 346. Anmerkg. 3.), wo bewiesen worden ist, daß jeder singuläre Werth den integrirenden Faktor z auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen muß. Umgekehrt kann man aber daraus nicht so gerade zu behaupten, daß jeder Werth y in x, welcher den integrirenden Faktor z auf die Form $\frac{1}{0}$ bringt, nothwendig ein singulärer Werth seyn müsse; während jedoch strenge daraus hervorgeht, daß jeder Werth y in x, welcher der $z = 0$ genügt, allemal ein Integral ist, und kein singulärer Werth.

renzialgleichung, ſo wie auch ihre ſingulären Werthe auf, und probirt nun irgend eine Verbindung dieſer letztern

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

unter ſich und mit andern, noch unbeſtimmt gelaſſenen Funktionen durch Multiplikation oder Diviſion zuſammengeſetzt, ob ſie nicht der integrirende Faktor ſeyn, d. h. ſtatt z geſetzt der Gleichung

$$(\odot)... \quad M.\partial z_y - N.\partial z_x + z.(\partial M_y - \partial N_x) = 0.$$

genügen werde.

Weil aber jede gegebene Differenzialgleichung unendlich viele beſondere Integrale $f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0$, ꝛc. ꝛc., ſo wie auch zuweilen mehrere ſinguläre Werthe hat; weil ferner der geſuchte integrirende Faktor nur einen oder einige derſelben enthalten kann, und weil man nun wiederum nicht weiß, auf welche poſitive oder negative Potenz erhoben, ſolche vorkommen werden: ſo wird man dieſes Mittel offenbar nur dann anwenden, wenn man in einem gegebenen beſonderen Falle durchaus an dem Erfolg einer jeden anderen Methode bereits verzweifelt.

§. 383.

Wir werden nun die Methode ſelbſt noch an einigen Beiſpielen erläutern.

I. Der Gleichung

$$\alpha y.\partial x + \beta x.\partial y + x^m.y^n.(\gamma y.\partial x + \delta x.\partial y) = 0$$

genügen als beſondere Integrale

1) $y = y_x = 0$ und 2) $x = x_y = 0.$

Alſo nimmt Trembley zum integrirenden Faktor das Produkt

3) $x^p.y^q = z,$

wobei er p und q noch unbeſtimmt läßt, und aus der obigen Gleichung (§. 382. ⊙) zu beſtimmen ſucht. Jene Gleichung wird aber

$$(q\alpha - p\beta + \alpha - \beta).x^p.y^q +$$
$$(q\gamma - p\delta + (n+1)\gamma - (m+1)\delta)x^{m+p}.y^{n+q} = 0,$$

zerfällt in

$$q\alpha - p\beta + \alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad q\gamma - p\delta + (n+1)\gamma - (m+1)\delta = 0,$$

und diese letzten Gleichungen liefern nun p und q.

II. Für die Gleichung

$$1) \qquad 2(a^2 - x).y.\partial y_x - ay - x = 0,$$

wenn man sie so schreibt

$$2) \qquad 2(a^2 - x).y - (ay + x).\partial x_y = 0,$$

findet man sogleich das besondere Integral

$$x = x_y = a^2 \quad \text{oder} \quad x - a^2 = 0.$$

Macht man aber

$$z = (x - a^2)^p,$$

so kann man p nicht so bestimmen, daß der Gleichung (⊙) genügt würde. Trembley sucht daher ein anderes besonderes Integral auf, indem er

$$3) \qquad x = A.y + B.y^2$$

setzt, und nun die Koeffizienten A und B so bestimmt, daß die Gleichung (2.) identisch wird. Hat er nun auf diesem Wege das besondere Integral

$$4) \qquad x + 2ay + y^2 = 0$$

gefunden, so setzt er

$$5) \qquad z = (x + 2ay + y^2)^q.(x - a^2)^p,$$

und die Gleichung (§. 382. ⊙) wird nun identisch, wenn

$$p = -1 \quad \text{und} \quad q = -\tfrac{1}{2}$$

genommen wird, so daß man von der Gleichung (2.) den integrirenden Faktor

$$z = \frac{1}{(a^2 - x).\sqrt{x + 2ay + y^2}}$$

gefunden hat.

III. Für die Gleichung

$$1) \quad y.\partial y_x + (3x + \alpha + \beta + \gamma).y + (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = 0$$

kann man wieder ein beſonderes Integral dadurch ſuchen, daß man als ſolches

2) $$y = A+B.x+C.x^2$$

annimmt, und nun A, B, C der Bedingung gemäß beſtimmt, daß (2.) der (1.) genüge. Man findet auf dieſem Wege 3 beſondere Integrale, nämlich

$$y+(x+\alpha)(x+\beta) = 0,$$
$$y+(x+\alpha)(x+\gamma) = 0,$$
$$y+(x+\beta)(x+\gamma) = 0,$$

und nimmt man zuletzt

$$z = (y+(x+\alpha)(x+\beta))^p.(y+(x+\alpha)(x+\gamma))^q.(y+(x+\beta)(x+\gamma))^r,$$

ſo findet ſich aus der Gleichung (⊙) $p = q = r = -1$.

IV. Die Gleichung

1) $$y-x.\partial y_x = n.\sqrt{1+\partial y_x^2}$$

hat den ſingulären Werth

2) $$x^2+y^2-n^2 = 0.$$

Löſt man ſie nach ∂y_x auf, ſo daß ſie die Form

3) $$(x^2-n^2)-(xy\pm n.\sqrt{y^2+x^2-n^2}).\partial x_y = 0$$

annimmt, ſo findet man ſogleich, daß die Gleichung

4) $$x^2-n^2 = 0$$

auch zwei beſondere Integrale der (1.) enthält.

Nimmt man nun

$$z = (x^2+y^2-n^2)^p.(x^2-n^2)^q,$$

ſo giebt die Gleichung (⊙) ſogleich $p = -\frac{1}{2}$, $q = -1$;
ſo daß

$$z = \frac{1}{(x^2-n^2).\sqrt{x^2+y^2-n^2}}$$

der geſuchte integrirende Faktor der (1.) iſt.

V. Von der Gleichung

1) $$a^2.(\partial y_x - 1) + (x^2 - y^2) = 0$$

findet Trembley das besondere Integral

2) $$y - x = 0.$$

Weil aber $z = (y-x)^p$ der Gleichung (⊙) für keinen konstanten Werth von p genügt, so versucht er es, und nimmt

3) $$z = (y-x)^p . e^v,$$

indem er sich v als eine unbekannte Funktion von x und y, dabei aber p als unbestimmt konstant denkt. Die Gleichung (⊙) wird nun für diese Form von z

4) $$(p+2).y^2 - p.x^2 - a^2 x.\partial v_x - 2xy + a^2 y.\partial v_x + (y^2 - x^2 + a^2).(y-x).\partial v_y = 0,$$

und ihr wird genügt, indem man

$$p + 2 = 0; \quad px^2 + a^2 x.\partial v_x = 0; \quad -2xy + a^2 y.\partial v_x = 0;$$

und

$$\partial v_y = 0$$

nimmt. Die erste dieser Gleichungen giebt $p = -2$; die beiden andern werden nun eine und dieselbe, nämlich $\partial v_x = \frac{2x}{a^2}$, also $v = \frac{x^2}{a^2}$; indem man die Konstante $= 0$ setzt, damit auch der letzten Gleichung $\partial v_y = 0$ genügt sey. — So findet sich dann zuletzt der integrirende Faktor

$$z = \frac{e^{x^2 : a^2}}{(y-x)^2}. \text{ *)}$$

---

*) Trembley und Lacroix meinen, daß wenn man diesen integrirenden Faktor, für dieses Beispiel, $= 0$ setze, so gäbe er $x^2 = \frac{1}{0}$; und nichts destoweniger genüge diese Gleichung $x^2 = \frac{1}{0}$ nicht der gegebenen Differenzialgleichung, so daß der Lehrsatz (§. 381.) in diesem Falle eine Ausnahme erleide. In dieser letztern Ansicht irren sie sich aber beide. Denn wenn man $z = 0$ setzt, so erhält man weder einen Werth für x, noch einen Werth für y, sondern bloß einen Widerspruch $0 = 1$, und dieser zeigt an, daß die Voraussetzung, daß irgend ein Werth x oder y existire, welcher diesen integrirenden Faktor z oder

§. 384.

Zuweilen läßt sich diese Methode des Trembley oder irgend eine andre, dann besser anwenden, wenn man vorher die gegebene Differenzialgleichung umformt, dadurch daß man sie mit den besondern Integralen in Verbindung bringt.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

1) $$\partial y_x + y^2 + X_x = 0,$$

und ist

$$y = Q$$

ein besonderes Integral derselben, so daß man

2) $$\partial Q_x + Q^2 + X_x = 0$$

als eine identische Gleichung hat, so folgt, wenn (2.) von (1.) subtrahirt wird,

3) $$\partial y_x + y^2 - \partial Q_x - Q^2 = 0.$$

Wendet man nun auf diese Gleichung (3.) die Methode des Trembley an, indem man wiederum

$$z = (y-Q)^p . e^v$$

setzt, so findet sich der integrirende Faktor der (3.) jetzt

$$z = \frac{e^{-2\int Q \cdot dx}}{(y-Q)^2}. \; *)$$

$\frac{e^{x^2:a^2}}{(y-x)^2}$ zu Null macht, einen Widerspruch in sich schließt, also nicht statt finden könne. Es existirt also dasmal kein Werth von x oder von y, welcher diesen Faktor z den Werth 0 geben könnte.

*) Macht man übrigens

$$y = Q + u,$$

so geht die Gleichung (1.) über in

$$\partial u_x + 2Q \cdot u + u^2 = 0.$$

Setzt man nun noch $u = \frac{1}{t}$, so wird daraus die lineare Gleichung

$$\partial t_x - 2Q \cdot t = 1,$$

für welche nun der integrirende Faktor ohne weiteres gefunden werden kann.

Anmerkg. Diese Beispiele mögen ausreichen, um den Sinn und Geist dieser Methode des Trembley näher erörtert zu haben. Wer noch näheres darüber kennen lernen will, lese die (Mémoires de l'Academie des sciences de Turin 1790—91.).

B. Versuche den integrirenden Faktor einer Differenzialgleichung der 2ten Ordnung in besonderen Fällen zu finden.

§. 385.

Bereits im (§. 348.) haben wir die zwei Gleichungen entwickelt, welche den integrirenden Faktor z bestimmen für die Gleichung der 2ten Ordnung

$$Q_{x,y,y_1} + P_{x,y,y_1} \cdot \partial^2 y_x = 0.$$

Auch haben wir daselbst noch einige besondere Fälle betrachtet, in denen z bloß eine Funktion von x, oder bloß von y, oder bloß von y_1 ist.

Setzen wir nun hier jene Untersuchungen noch etwas weiter fort, und zwar zunächst für den Fall, daß die gegebene Gleichung der 2ten Ordnung diese besondere Form habe, nämlich

$$\partial^2 y_x + Q \cdot \partial y_x^2 + R \cdot \partial y_x + S = 0,$$

wo Q, R, S Funktionen von x und y sind. Die beiden jetzigen Gleichungen zur Bestimmung des integrirenden Faktors z gehen aber aus jenen des (§. 348.) hervor, wenn man dort überall 1 statt P, dagegen $Q \cdot y_1^2 + R \cdot y_1 + S$ statt des dortigen Q_{x,y,y_1} substituirt

Setzen wir nun voraus, daß vielleicht für die hier gegebene Gleichung der 2ten Ordnung

$$1) \qquad \partial^2 y_x + Q \cdot \partial y_x^2 + R \cdot \partial y_x + S = 0,$$

der integrirende Faktor z bloß x und y, aber nicht y_1 enthalte, so muß man in den gedachten beiden Gleichungen, zur Bestimmung von z, noch 0 statt ∂z_{y_1} setzen, und diese Gleichungen werden nun folgende, nämlich:

$$2) \qquad \partial z_y - Q \cdot z = 0$$

und 3) $\partial^2 z_x + 2y_1 \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + y_1^2 \cdot \partial^2 z_y - (R + 2Q \cdot y_1) \cdot \partial z_x +$
$(S - Q \cdot y_1^2) \cdot \partial z_y - (\partial R_x - \partial S_y + 2y_1 \cdot \partial Q_x + y_1^2 \cdot \partial Q_y) \cdot z = 0.$

Aus dieſen beiden Parzialgleichungen muß nun z gefunden werden, *) nach (§. §. 323 — 326. d. V. Th. d. S.).

Differenziirt man aber die (2.) nach x und nach y, ſo erhält man

4) $\partial^{1,1} z_{x,y} - Q \cdot \partial z_x - z \cdot \partial Q_x = 0$

und 5) $\partial^2 z_y - Q \cdot \partial z_y - z \cdot \partial Q_y = 0,$

und mit Hülfe dieſer Gleichungen kann man nun aus der (3.) die Ableitungen $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$ elimiiren, und man erhält dadurch

6) $\partial^2 z_x - R \cdot \partial z_x + S \cdot \partial z_y - (\partial R_x - \partial S_y) \cdot z = 0.$

Differenziirt man nun dieſe Gleichung wiederum nach y, ſo wie die Gleichung (4.) nach x, und eliminirt man dann aus dieſen beiden Gleichungen, ſo wie aus den 4 Gleichungen (2. 4. 5 und 6.) die 5 Ableitungen $\partial^{2,1} z_{x,y}$, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$; ſo erhält man

7) $\partial z_x = T \cdot z,$

wenn wir der Kürze wegen

8) $T = \frac{\partial^2 Q_x - R \cdot \partial Q_x + S \cdot \partial Q_y + Q \cdot \partial S_y + \partial^2 S_y - \partial^{1,1} R_{x,y}}{\partial R_y - 2\partial Q_x}$

machen, ſo daß T mit Q, R, S zugleich bekannt iſt.

Durch dieſe Eliminationen hat man nun zwei Parzialgleichungen der erſten Ordnung erhalten, nämlich

---

*) Da dieſe, ſo wie einige noch hier folgende Unterſuchungen zu Parzialgleichungen führen, ſo würden ſie beſſer dem Kapitel (XX.) nachſtehen, welches die Verſuche der Integration ſolcher (Parzial-) Gleichungen (in endlicher Form) ſyſtematiſch aufzählt. Weil wir aber die Theorie der Parzialgleichungen bereits gehabt haben, und hier alſo nichts vorkommt, was nicht verſtanden werden könnte, ſo mag es beſſer ſeyn, daß die gleichartigen Materien hier unmittelbar hinter einander ihre Erledigung finden.

2) $\partial z_y = Q \cdot z$ und 7) $\partial z_x = T \cdot z$.

Behandelt man nun diese nach (§. §. 296 und 297. d. V. Th. d. S.), so erhält man zunächst aus (2.)

9) $\frac{\partial z_y}{z} = Q$, also $log\ z = \int_{y \div y'} Q \cdot dy + X$,

wo y' ein beliebiger von x unabhängiger Werth seyn mag, während X eine noch zu bestimmende Funktion von x, aber konstant nach y ist. Setzt man nun diesen Werth von z in die (7.), so erhält man

10) $\partial X_x = T - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy$,

also 11) $X = \int (T - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy) \cdot dx$,

wodurch z völlig bestimmt ist, sobald sich nur

I. $\partial T_y = \partial Q_x$

ausweißt, welches die Gleichung ist, auf welche die Bedingung, daß ∂X_x, also $T - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy$ kein y enthalte, daß mithin $\partial (T - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy)_y = 0$ seyn müsse, sich zurückzieht. Ist diese Bedingungsgleichung (I.) von den gegebenen Funktionen Q, R und S nicht erfüllt, so enthält die Voraussetzung, daß z nicht y_1 enthalten werde, einen Widerspruch.

Weil aber der Faktor z den beiden Gleichungen (2. u. 3) zu genügen hat, und allen beiden allemal genügt, so oft er den Gleichungen (2. u. 6.) genügt, weil aus (2. u. 6.) die Gleichung (3.) gefolgert werden kann; und weil der bis jetzt gefundene Werth von z, nämlich

12) $z = e^{\int_{y \div y'} Q \cdot dy + \int (T - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy) \cdot dx}$

der Gleichung (2.) allemal genügt: so muß man diesen Werth für z auch noch in die Gleichung (6.) setzen, um zu sehen, ob sie dadurch identisch wird, oder ob man dadurch eine neue und letzte Bedingungsgleichung erhält, welche von den Funktionen Q, R, S erfüllt seyn muß, wenn der gesuchte integrirende Faktor wirklich bloß x und y, und nicht y_1 soll enthalten können. — Substituirt man aber diesen Werth von z in die (6.), und erinnert man sich, daß

$$\partial z_x = T \cdot z, \quad \text{alſo} \quad \partial^2 z_x = (\partial T_x + T^2) \cdot z,$$

ſo wie $\partial z_y = Q \cdot z$ iſt; ſo erhält man augenblicklich als neue Bedingungsgleichung

$$\text{II.} \quad \partial T_x + T \cdot (T - R) + Q \cdot S + \partial S_y - \partial R_x = 0.$$

Sind alſo von den gegebenen Funktionen Q, R und S die Bedingungsgleichungen (I. und II.) wirklich erfüllt, ſo exiſtirt ein integrirender Faktor z, der bloß x und y und kein y_1 enthält, und ſolcher iſt in (12.) auch ſchon gefunden. Iſt dagegen eine der beiden Bedingungsgleichungen (I. oder II.) nicht erfüllt, ſo nimmt der geſuchte Faktor z auch y_1 in ſich auf, und iſt dann durch das vorhergehende keinesweges beſtimmt.

Beiſpiel. Iſt gegeben die Gleichung

$$x^2 y \cdot \partial^2 y_x + 2x^2 \cdot \partial y_x^2 + (2x + 3xy) \cdot \partial y_x + 2y = 0,$$

ſo hat man, weil ſie auf die oben gegebene Form gebracht werden muß,

$$Q = \frac{2}{y}; \quad R = \frac{2+3y}{xy}; \quad S = \frac{2}{x^2};$$

daraus nach (8.)

$$T = \frac{3}{x},$$

und man findet die beiden Bedingungsgleichungen (I. u. II.) durch dieſe Werthe von Q, R, S erfüllt, alſo daß man erhält aus (12.)

$$z = x^3 \cdot y^2.$$

Multiplizirt man aber damit die gegebene Differenzialgleichung, nämlich

$$\partial^2 y + \frac{2}{y} \cdot \partial y_x^2 + \frac{2+3y}{xy} \cdot \partial y_x + \frac{2}{x^2} = 0,$$

und integrirt man dann nach den (§. §. 339. 342. u. 343.), ſo ergiebt ſich

$$x^3 y^2 \cdot \partial y_x + x^2 \cdot y^2 = C$$

als ein allgemeines erſtes Integral der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung.

§. 386.

Betrachten wir noch einige beſondere Fälle der vorhergehenden Aufgabe.

I. Ist $Q = 0$, so ist $\partial z_y = 0$; und $z, = e^{\int T \cdot dx}$ darf nun kein y enthalten, ist also eine bloße Funktion von x allein. Die Bedingung (§. 385. I.) reduzirt sich nun darauf, daß

T oder $\frac{\partial^2 S_y - \partial^{1,1} R_{x,y}}{\partial R_y}$ kein y enthalte. Die andere Bedingung (§. 385. II.) dagegen reduzirt sich nun auf

$$\partial T_x + T \cdot (T - R) - \partial R_x + \partial S_y = 0.$$

II. Soll der integrirende Faktor z kein x, also bloß y enthalten, so hat man $\partial z_x = 0$, also $T = 0$.

Die Bedingungsgleichung (§. 385. I.) giebt nun $\partial Q_x = 0$, also muß in diesem Falle Q nach x konstant seyn, so daß Q höchstens y allein enthalten kann.

Die andere Bedingungsgleichung (§. 385. II.) wird dann

$$Q \cdot S + \partial S_y - \partial R_x = 0.$$

III. Wäre endlich der Nenner in dem Ausdruck von T (§. 385. N. 8.) der Null gleich, also

$$1) \qquad \partial R_y - 2\partial Q_x = 0,$$

so müßte man diesen Ausnahmsfall direkt für sich behandeln nach (§. 96. d. I. Th. d. S.) und nach (§. 385.). Geschieht dies, so findet man für diesen Fall

$$2) \quad z = e^{\int_{y \div y'} Q \cdot dy + \int (\frac{1}{2} R + X - \int_{y \div y'} \partial Q_x \cdot dy) \cdot dx}$$

wo X irgend ein der Gleichung

$$3) \quad \partial X_x + X^2 = \tfrac{1}{4} R^2 + \tfrac{1}{2} \partial R_x - Q \cdot S - \partial S_y$$

genügender Werth ist, wenn nur die nachstehende einzige Bedingungsgleichung erfüllt ist, nämlich die Gleichung

$$\partial(\tfrac{1}{4} R^2 + \tfrac{1}{2} \partial R_x - Q \cdot S - \partial S_y)_y = 0,$$

so daß der Ausdruck $\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{2} \partial R_x - Q \cdot S - \partial S_y$ kein y mehr enthält.

Zu diesem letztern Fall gehört die lineare Gleichung der 2ten Ordnung

$$1.1.) \qquad \partial^2 y_x + P'_x \cdot \partial y_x + Q'_x \cdot y = R'_{x'}$$

weil hier

$$Q = 0, \quad R = P'_x \quad \text{und} \quad S = Q'_x \cdot y - R'_x$$

ist. Die obige Gleichung zur Bestimmung von X wird nun

$$2.2.) \qquad \partial X_x + X^2 = \tfrac{1}{4}P'^2_x + \tfrac{1}{2}\partial P'_x - Q'_x;$$

und kann man einen ihr genügenden Werth von X finden, so ist der integrirende Faktor z für die gegebene Differenzialgleichung bekannt.

Um die (2.2.), welche einen genügenden Werth von X zu geben hat, wo möglich einfacher zu machen, setze man

$$3.3.) \qquad X = \tfrac{1}{2}P'_x + \frac{\partial z'_x}{z'};$$

dadurch geht sie über in

$$4.4.) \qquad \partial^2 z'_x + P'_x \cdot \partial z'_x + Q' \cdot z' = 0,$$

welche Gleichung die reduzirte ist, im Vergleich mit der gegebenen (1.1.) als der vollständigen lineären Gleichung.

Hat man daher aus (4.4.) einen genügenden Werth von z' gefunden, so giebt dieser aus (3.3.) sogleich einen der (2.2.) genügenden Werth von X, und daraus folgt dann aus (III. 3.) der integrirende Faktor der (1.1.), nämlich

$$5.5) \qquad z = e^{\int P \cdot dx} \cdot z'.$$

Multiplizirt man nun damit die gegebene Gleichung (1.1.), und integrirt man dann, so erhält man als erstes allgemeines Integral der (1.1.)

$$6.6.) \quad \partial y_x - \frac{\partial z'_x}{z'} \cdot y - \frac{e^{-\int P' \cdot dx}}{z'} \cdot (\int e^{\int P' \cdot dx} \cdot z' \cdot R' \cdot dx + C) = 0,$$

welche Gleichung wiederum eine lineäre Gleichung der 1sten Ordnung ist, daher auf's Neue integrirt werden kann.

Kennt man zwei Werthe von z' aus (4.4.), und nennt man den zweiten z'', so erhält man ausser dem allgemeinen ersten Integral (6.6.) noch ein allgemeines erstes Integral, nämlich

$$7.7.) \quad \partial y_x - \frac{\partial z''_x}{z''} \cdot y - \frac{e^{-\int P' \cdot dx}}{z''} \cdot (\int e^{\int P' \cdot dx} \cdot z'' \cdot R' \cdot dx + C_1) = 0.$$

Eliminirt man dann aus (6.6. und 7.7.) noch ∂y_x, so hat man augenblicklich das Ur-Integral der (1.1.) mit den beiden willkührlichen Konstanten C und C_1, nämlich

$$y = \frac{e^{-\int P' \cdot dx}}{\frac{z'}{z''} \cdot \partial z''_x - \partial z'_x} \cdot (\int e^{\int P \cdot dx} \cdot z' \cdot R' \cdot dx + C)$$

$$+ \frac{e^{-\int P' \cdot dx}}{\frac{z''}{z'} \cdot \partial z'_x - \partial z''_x} \cdot (\int e^{\int P' \cdot dx} \cdot z'' \cdot R' \cdot dx + C_1).$$

Wendet man dies auf den Fall an, daß die Koeffizienten P', Q', R' der gegebenen Gleichung (1.1.) konstant sind, so erhält man hieraus sogleich wieder dasselbe Resultat, welches wir früher schon für die lineäre Gleichung der 2ten Ordnung mit konstanten Koeffizienten gefunden haben.

C. Versuche, zusammengehörige Differenzialgleichungen und integrirende Faktoren zu finden, wenn beide bloß der Form nach gegeben sind.

§. 387.

Da die Aufsuchung des integrirenden Faktors in so seltenen Fällen gelingt, so hat Euler die Aufgabe umgekehrt, und zu integrirenden Faktoren von gegebener Form, die Differenzialgleichungen gesucht. — Da findet man denn für Differenzialgleichungen der 1ten Ordnung ohngefähr folgendes:

I. Soll der integrirende Faktor z eine bloße Funktion von x allein seyn, so muß die Differenzialgleichung auf die Form

$$\partial y_x + y \cdot f_x + \psi_x = 0$$

gebracht werden können, wo f_x und ψ_x ganz beliebige Funktionen von x sind, d. h. sie muß lineär seyn. *).

---

*) Soll nämlich

$$M + N \cdot \partial y_x = 0$$

oder

$$\frac{M}{N} + \partial y_x = 0$$

durch den integrirenden Faktor Q_x integrabel werden, so hat man zur Bedingung

$$\partial\left(\frac{M}{N} \cdot Q\right)_y = \partial Q_{x'}$$

oder

$$Q \cdot \partial\left(\frac{M}{N}\right)_y = \partial Q_{x'}$$

II. Fragt man ſich aber: Welche Funktionen von x müſſen P und Q in der Gleichung

1) $$P \cdot y + (y + Q) \cdot \partial y_x = 0$$

vorſtellen, damit dieſe Gleichung durch einen Faktor von der Form

2) $$\frac{1}{y^3 + Ry^2 + Sy}$$

integrabel werde, und ſucht man auch zugleich die noch unbeſtimmt gelaſſenen Funktionen R, S von x, ſo findet man aus der Bedingungsgleichung der Integrabilität folgende Bedingung:

3) $$(2P + \partial Q_x - \partial R_x) \cdot y^3 + (P \cdot R + R \cdot \partial Q_x - Q \cdot \partial R_x - \partial S_x) \cdot y^2 + \\ + (S \cdot \partial Q_x - Q \cdot \partial S_x) \cdot y = 0.$$

Da nun dieſe Gleichung für jedes y identiſch werden ſoll, ſo zerfällt ſie in folgende 3 Gleichungen:

4) $$2P + \partial Q_x - \partial R_x = 0;$$

5) $$P \cdot R - R \cdot \partial Q_x - Q \cdot \partial R_x - \partial S_x = 0;$$

6) $$S \cdot \partial Q_x - Q \cdot \partial S_x = 0,$$

wodurch 3 der Funktionen P, Q, R, S in die 4te ausgedrückt ſind.

Die Gleichung (6.), integrirt, giebt

7) $$S = a \cdot Q,$$

wo a eine willkührliche Konſtante iſt. Setzt man dieſen Werth in die beiden andern (4. und 5.), und eliminirt man dann aus beiden P, ſo erhält man

---

oder $$\partial\left(\frac{M}{N}\right)_y = \frac{\partial Q_x}{Q_x} = f_{x'}$$

alſo $$\frac{M}{N} = y \cdot f_x + \psi_x.$$

Daß eine lineäre Gleichung allemal eine bloße Funktion von x zum integrirenden Faktor habe, iſt ſchon viel früher gelehrt worden. Nun aber ergiebt ſich auch, daß eine Gleichung der erſten Ordnung auch allemal lineär ſeyn muß, wenn ſie eine bloße Funktion von x allein zum integrirenden Faktor haben ſoll.

8) $(2Q-R)\cdot\partial R_x+(2a-R)\cdot\partial Q_x = 0.$

oder

9) $(2Q-R)+(2a-R)\cdot\partial Q_R = 0.$

Diese letztere Gleichung wird integrabel durch den Faktor $\left(\frac{1}{2a-R}\right)^3$ nach (§. 340.), und giebt, nach (§. 343.) integrirt,

10) $Q = R-a+b(2a-R)^2,$

wo b eine neue willkührliche Konstante ist.

Man kann daher für R eine beliebige Funktion von x nehmen, wenn man dann nur

11) $P = b\cdot(2a-R)\cdot\partial R_x;$ 12) $Q = R-a+b(2a-R)^2;$

und

13) $S = a\cdot(R-a)+ab\cdot(2a-R)^2$

dazu nimmt, so hat man allemal eine Gleichung (1.), welche durch den Faktor (2.) integrabel wird.

III. Hernach hat Euler die Frage gestellt: Wie müssen die Funktionen P, Q, R und S von x beschaffen seyn, damit die Differenzialgleichung von der Form

1) $P\cdot y+(Q\cdot y+R)\cdot\partial y_x = 0$

durch den Faktor von der Form

2) $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$

integrabel werde.

Die Bedingungsgleichung der Integrabilität giebt hier, wenn man sie nach Potenzen von y ordnet, und dann beachtet, daß sie für jedes y identisch werden muß, die 3 Gleichungen

3) $(m+1)\cdot P-\partial R_x = 0;$ 4) $S\cdot\partial Q_x-nQ\cdot\partial S_x = 0$

und

5) $S\cdot\big((m+1)\cdot P-\partial R_x\big)-n\cdot P\cdot S-\partial Q_x+n\cdot R\cdot\partial S_x = 0.$

Die (3.) giebt

6) $$P = \frac{\partial R_x}{m+1};$$

die (4.) giebt, integrirt,

7) $$Q = a \cdot S^n;$$

und die (5.) wird dadurch

8) $$S \cdot \partial R_s - (m+1) \cdot R + (m+1) \cdot a \cdot S^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung wird aber integrabel, wenn man sie durch S^{m+2} dividirt, und giebt dann, integrirt,

9) $$\frac{R}{S^{m+1}} = b - \frac{(m+1) \cdot a \cdot S^{n-m-2}}{n-m-2}.$$

Man hat also in (9. 7. und 6.) R, Q, P in S ausgedrückt, während statt S eine ganz beliebige Funktion von x genommen werden kann.

IV. Suchen wir noch die Funktionen P, Q, R von x, so, daß die Differenzialgleichung

1) $$P \cdot y + Q + y \cdot \partial y_x = 0,$$

durch den Faktor

2) $$(y+R)^n$$

integrabel werde.

Man findet dasmal ohne alle Integration, aus der Bedingungsgleichung der Integrabilität,

3) $$P = \frac{n}{n+1} \cdot \partial R_x \quad \text{und} \quad 4) \quad Q = -\frac{1}{n+1} \cdot R \cdot \partial R_x,$$

während R ganz willkührlich bleibt.

Soll aber die Gleichung (1.) durch den Faktor

5) $$(y^2 + R \cdot y + S)^n$$

integrabel werden, so zerfällt die Bedingungsgleichung der Integrabilität in diese dreie

6) $$P = \frac{n}{2n+1} \cdot \partial R_x; \qquad 7) \quad \frac{S \cdot \partial R_x}{2n+1} + Q \cdot R = 0$$

und

8) $$\frac{n+1}{2n+1}\cdot R\cdot\partial R_x+2Q-\partial S_x = 0.$$

Eliminirt man dann Q aus (7. u. 8.), so wird die entstehende Gleichung integrabel durch den Faktor

9) $$\frac{1}{2n+1}\cdot R^{\frac{1-2n}{1+2n}},$$

und giebt

10) $$S = \tfrac{1}{4}R^2+a\cdot R^{\frac{-2}{2n+1}},$$

so daß in (6. 7. und 10.) P, Q, S in R ausgedrückt sind, während statt R eine beliebige Funktion von x gesetzt werden kann.

Soll die Gleichung (1.) durch diesen Faktor

11) $$(y^3+R\cdot y^2+S\cdot y+T)^n$$

integrabel werden, so liefert die Bedingungsgleichung der Integrabilität die 4 Gleichungen

12) $$(3n+1)\cdot P-n\cdot\partial R_x = 0;$$

13) $$(2n+1)\cdot P\cdot R+3n\cdot Q-n\cdot\partial S_x = 0;$$

14) $$(n+1)\cdot P\cdot S+2n\cdot Q\cdot R-n\cdot\partial T_x = 0;$$

15) $$P\cdot T+nQ\cdot S = 0.$$

Findet man nun aus (12. und 15.) P und Q, und setzt man diese Werthe in (13. und 14.), so erhält man

16) $$(2n+1)\cdot S\cdot R\cdot\partial R_x-3T\cdot\partial R_x-(3n+1)\cdot S\cdot\partial S_x = 0,$$

17) $$(n+1)\cdot S^2\cdot\partial R_x-2T\cdot R\cdot\partial R_x-(3n+1)\cdot S\cdot\partial T_x = 0.$$

Hier müßte man aber nun die Methode der (§. §. 281. 282. d. V. Th. d. S.) anwenden, um T und alle Ableitungen von T zu eliminiren, und dann würde man eine Gleichung der 2ten Ordnung erhalten, welche noch integrirt werden müßte. Die Rechnungen würden jedoch sehr verwickelt, und dabei bliebe es noch sehr problematisch, ob man zuletzt die Endgleichung zwischen R und S und ∂S_R und $\partial^2 S_R$ wirklich dergestalt integriren könnte, daß man zu einer Urgleichung zwischen R und S gelangte.

Versucht man aber die Gleichung (1.) durch den Faktor von

der Form

18) $$(y+R)^m \cdot (y+S)^n$$

integrabel zu machen, ſo wird man durch die Bedingungsgleichung der Integrabilität zu den Gleichungen geführt:

19) $$(m+n+1)\cdot P - m\cdot \partial R_x - n\cdot \partial S_x = 0,$$

20) $$(n+1)\cdot P\cdot R + (m+1)\cdot P\cdot S + (m+n)\cdot Q - m\cdot S\cdot \partial R_x - n\cdot R\cdot \partial S_x = 0$$

und

21) $$P\cdot R\cdot S + m\cdot Q\cdot S + n\cdot Q\cdot R = 0.$$

Findet man hier aus (19. u. 21.) P und Q, ſetzt dieſe Werthe in (20.), und dividirt man das Reſultat durch R—S, ſo erhält man

22) $$\big((n+1)\cdot R + m\cdot S\big)\cdot \partial R - \big((m+1)\cdot S + n\cdot R\big)\cdot \partial S = 0.$$

Da dieſe Gleichung homogen iſt, ſo kann man ſie integriren (nach §. 347.), und man erhält

23) $$(R-S)^{m+n+1}\cdot\big((n+1)\cdot R + (m+1)\cdot S\big) = a.$$

Man kann nun R—S durch u bezeichnen, und dann aus (23. 21. 20. 19.) R, S, Q, P alle in u ausdrücken, während ſtatt u jede beliebige Funktion von x geſetzt werden kann.

V. Betrachten wir noch die Gleichung

1) $$\partial y_x + y^2 + X = 0,$$

welche die Riccati'ſche Gleichung (§. 354. III.) in ſich ſchließt, und verſuchen wir ſie integrabel zu machen durch einen Faktor von der Form

2) $$\frac{P}{y^2 + 2Q\cdot y + R}.$$

Wir werden zu den Gleichungen

3) $$2P\cdot Q - \partial P_x = 0;$$

4) $$2P\cdot R - 2P\cdot X - 2Q\cdot \partial P_x + 2P\cdot \partial Q_x = 0$$

und

5) $$-2P\cdot Q\cdot X - R\cdot \partial P_x + P\cdot \partial R_x = 0$$

geführt. Eliminirt man hieraus ∂P_x, so ergeben sich die beiden Gleichungen

6) $$2Q = \frac{R - X + \partial Q_x}{Q};$$ 7) $$\frac{\partial R_x - 2Q\cdot X}{R} = 2Q.$$

Eliminirt man hieraus X, so erhält man

8) $$4Q\cdot(Q^2 - R) = 2Q\cdot\partial Q_x - \partial R_x.$$

Macht man nun der Kürze wegen

9) $$Q^2 - R = S,$$

so geben die vorstehenden Gleichungen sogleich

10) $$4Q\cdot S = \partial S_x;$$ 11) $$X = \frac{4S\cdot Q\cdot\partial Q_x}{\partial S_x} - Q^2 - S;$$

12) $$R = Q^2 - S;$$ 13) $$\frac{\partial P_x}{P} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial S_x}{S};$$

also $P = a\cdot\sqrt{S}$, oder $P = \sqrt{S}$ (für $a = 1$).

Und man findet also, daß die Gleichung (1.), nämlich

14) $$\partial y_x + y^2\cdot\frac{\partial S_x}{4\partial Q_x} + \partial Q_x - \frac{(Q^2+S)\cdot\partial S_x}{4Q\cdot S} = 0,$$

durch den Faktor

15) $$\frac{\sqrt{S}}{(y+Q)^2 - S}$$

integrabel wird.

Aus (10.) ergiebt sich übrigens noch $Q = \frac{\partial S_x}{4S}$, also $\partial Q_x = \frac{S\cdot\partial^2 S_x - \partial S_x^2}{4S^2}$, so daß diese Werthe für Q und ∂Q_x in (14. u. 15.) noch substituirt werden müssen, und nur statt S eine ganz beliebige Funktion von x gesetzt werden kann.

Multiplizirt man die (14.) mit dem integrirenden Faktor (15.), und integrirt man dann, so ergiebt sich das allgemeine Integral

$$\tfrac{1}{2}\,log\left(\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}}\right)+\tfrac{1}{4}\int\frac{\partial S_x}{Q\cdot\sqrt{S}}\cdot dx = C. \;*)$$

§. 388.

Da man übrigens über die Integration der Differenzialgleichungen, ſelbſt von der erſten Ordnung und von der Form

$$M+N\cdot\partial y_x = 0,$$

in endlicher Form, ſo ſehr wenig weiß, und das Auffinden des allgemeinen Integrals in endlicher Form in den ſeltenſten Fällen gelingt; und da auch die in dem (§. 387.) vorſtehenden Verſuche offenbar nicht von bedeutendem Nutzen ſind: ſo kann man in vorkommenden Fällen, wo eine ſolche Gleichung der erſten Ordnung von der Form

$$M+N\cdot\partial y_x = 0$$

integrirt werden ſoll, auch noch verſuchen, integrirende Faktoren als Funktionen von x und y der Form nach mit konſtanten aber unbeſtimmten Koefizienten vorauszuſetzen, und dann zuſehen, ob nicht dieſe konſtanten Koeffizienten ſo beſtimmt werden können, daß der Bedingungsgleichung der Integrabilität genügt wird.

Man kann zu dem Ende die Rechnung zuerſt mit dem integrirenden Faktor von der Form der ganzen Funktionen

$$A+B\cdot x+C\cdot y+D\cdot x^2+E\cdot xy+F\cdot y^2+\ldots.$$

verſuchen. Entſpricht für die beſondere Gleichung, die man gerade integriren will, die Ausführung nicht der Vorausſetzung, ſo verſucht man es zunächſt mit dem integrirenden Faktor von der

---

*) Da eine der Funktionen P, Q, R, S willkührlich bleibt, ſo könnte man auch zur Bedingung machen, daß $R = Q^2$ wird. Dann würde man finden, daß die Gleichung

$$\partial y_x+y^2\pm\partial Q_x-Q^2 = 0$$

integrabel wird durch den Faktor

$$\frac{e^{\pm 2\int Q\cdot dx}}{(y\pm Q)^2},$$

welche Funktion von x auch immer ſtatt Q genommen werden mag.

Form der gebrochenen rationalen Funktionen, nämlich

$$\frac{A+B\cdot x+C\cdot y+D\cdot x^2+E\cdot xy+F\cdot y^2+\cdots}{A'+B'\cdot x+C'\cdot y+D'\cdot x^2+E'\cdot xy+F'\cdot y^2+\cdots}.$$

Enthält die zu integrirende Differenzialgleichung

$$M+N\cdot\partial y_x = 0$$

irrationale Funktionen oder transcendente, so wird man suchen auch diese in die Form des integrirenden Faktors mit aufzunehmen. — In jedem Falle ist aber das ganze Verfahren immer nur ein sehr unsicheres und dabei höchst mühsames Herumtappen, bei welchem die Rechnungen häufig nicht durchzuführen sind, und viel öfter noch ohne Erfolg bleiben werden.

§. 389.

Betrachten wir nun noch dieselben Fragen in Bezug auf Differenzialgleichungen der 2ten Ordnung

I. Soll die Differenzialgleichung

1) $$\partial^2 y_x+P'\cdot\partial y_x+Q'\cdot y = 0$$

durch den Faktor von der Form

2) $$z = K_x\cdot y_1+L_x\cdot y$$

integrabel werden, wo K und L bekannte Funktionen von x sind, so erhält man aus den beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität des (§. 348.) jetzt

3) $$2L+\partial K_x-2P'\cdot K = 0;$$

4) $$\left.\begin{matrix} y_1\cdot(2\partial L_x+\partial^2 K_x-2P'\cdot\partial K_x-2K\cdot\partial P'_x) \\ +y\cdot(\partial^2 L_x-P'\cdot\partial L_x+2Q'\cdot L-L\cdot\partial P'_x-K\cdot\partial Q'_x-Q'\cdot\partial K_x)\end{matrix}\right\}=0.$$

Differenziirt man die (3.), so reduzirt sich die (4.) sogleich auf ihre zweite Zeile, kann nach Q' als lineäre Gleichung der 1ten Ordnung integrirt werden, und giebt

5) $$Q' = \frac{e^{2\int\frac{L}{K}\cdot dx}}{K}\cdot\int e^{-2\int\frac{L}{K}\cdot dx}\cdot(\partial^2 L_x-\partial(P'\cdot L)_x)\cdot dx.$$

Setzt man aber hier statt P' seinen Werth aus (1.), so kann man den Ausdruck

$$e^{-2\int \frac{L}{K}\cdot dx}\cdot[\partial^2 L_x - \partial(P'\cdot L)_x]$$

wirklich integriren, und man erhält zum Integral

$$e^{-2\int \frac{L}{K}\cdot dx}\cdot\left(\partial L_x - \tfrac{1}{2}\frac{L}{K}\cdot\partial K_x\right);$$

und dadurch wird aus (5.)

$$6)\qquad Q' = \frac{C}{K}\cdot e^{2\int \frac{L}{K}\cdot dx} + \frac{\partial L_x}{K} - \tfrac{1}{2}\frac{L}{K^2}\cdot\partial K_x.$$

Und so hat man denn aus (3. u. 6.) P' und Q' so gefunden, daß die Gleichung (1.) durch den gegebenen integrirenden Faktor (2.) integrabel wird. Multiplizirt man nun diese (1.) mit dem Faktor in (2.), so kann die Integration nach den (§. §. 339. oder 342.) sogleich erfolgen.

Man kann aber die (1.) integriren, und ihre Koefffizienten P', Q', dazu finden, beides zugleich und auf einmal. Multiplizirt man nämlich die (1.) mit dem Faktor (2.), so erhält man

$$7)\quad (K\cdot y_1 + L\cdot y)\cdot\partial^2 y_x + P'\cdot K\cdot y_1^2 + (Q'\cdot K + P'\cdot L)\cdot y\cdot y_1 + Q'\cdot L\cdot y^2 = 0.$$

Man findet nun hieraus nach dem Verfahren (III. des §. 342.) das allgemeine Integral

$$8)\qquad \tfrac{1}{2}K\cdot y_1^2 + L\cdot y\cdot y_1 + W_{x,y} = C_1,$$

wo $W_{x,y}$ noch zu bestimmen bleibt. Differenziirt man aber die (6.), und vergleicht man das Resultat mit der (5.), so erhält man die Gleichungen

$$9)\qquad 2L + \partial K_x - 2P'\cdot K = 0;$$

$$10)\qquad \partial W_y = (Q'\cdot K + P'\cdot L - \partial L_x)\cdot y;$$

und

$$11)\qquad \partial W_x = Q'\cdot L\cdot y^2.$$

Die Gleichung (9.) ist von der obigen (3.) nicht verschieden, und liefert P'. Findet man aber aus den beiden Gleichungen (10. u. 11.) noch W, so erhält man noch eine Bedingungsgleichung der Integrabilität, welche Q' liefert, und überdies

12) $$W = \tfrac{1}{2}(Q' \cdot K + P' \cdot L - \partial L_x) \cdot y^2 ;$$

so daß das Integral (8.) der (1.) folgendes wird, nämlich

13) $$\tfrac{1}{2}K \cdot \partial y_x^2 + Ly \cdot \partial y_x + \tfrac{1}{2}\left(C \cdot e^{2\int \frac{L}{K} \cdot dx} + \frac{L^2}{K}\right) \cdot y^2 = C_1,$$

wo C_1 die willkührliche Konstante ist, C aber in Q' vorkommt.

Diese Gleichung der 1sten Ordnung läßt sich wiederum integriren, wenn man $C_1 = 0$ nimmt; denn sie läßt sich dann nach ∂y_x algebraisch auflösen, und wird dadurch lineär. Weil aber dann ∂y_x zwei Werthe annimmt, so findet man zwei Integrale y, nämlich $y = y'$ in x und c, und $y = y''$ in x und c_1. Also hat man nun auch $y = y' + y''$; d. h.

14) $$y = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(c \cdot e^{\int \sqrt{\frac{-CJ}{K}} \cdot dx} + c_1 \cdot e^{-\int \sqrt{\frac{-CJ}{K}} \cdot dx}\right)$$

als das allgemeine Ur-Integral der gegebenen lineären Gleichung (1.) mit den beiden willkührlichen Konstanten c und c_1; wenn nur P' und Q' die oben gefundenen, in K und L ausgedrückten Werthe haben, und wo, der größeren Bequemlichkeit des Drukkes wegen

15) $$e^{2\int \frac{L}{K} \cdot dx} = J$$

gesetzt worden ist.

Differenziirt man die (14.), und eliminirt man aus diesem Differenzial, aus der (14.) und aus dem ersten Integral (13.) sowohl y als auch ∂y_x, so muß x von selbst herausfallen, und man erhält

16) $$2Ccc_1 = C_1 \quad \text{oder} \quad c_1 = \frac{C_1}{2Cc}.$$

Für diesen Werth von c_1 ist also die (14.) auch das allgemeine Integral der (13.) für jedes C_1, und hat dann noch c als willkührliche Konstante.

II. Versuchen wir es, dieselbe Gleichung

1) $$\partial^2 y_x + P' \cdot \partial y_x + Q' \cdot y = 0$$

durch den Faktor

$$2) \qquad z = \frac{y}{(y_1 + K \cdot y)(y_1 + L \cdot y)}$$

integrabel zu machen, und machen wir es wieder so, wie zuletzt in (I.). Multiplizirt man nämlich die (1.) mit dem Faktor (2.), und integrirt man dann nach (III. des §. 342.), so erhält man

$$3) \qquad log \frac{y_1 + K \cdot y}{y_1 + L \cdot y} + W_{x,y} = C,$$

wo $W_{x,y}$ noch dazu gefunden werden muß.

Differenziirt man nun diese Gleichung (3.), multiplizirt man mit dem Renner, dividirt man zuletzt durch $L - K$, und vergleicht man das Resultat mit der zu integrirenden Gleichung, so erhält m

$$\partial W_y = 0; \quad \partial W_x = L - K; \quad \text{also} \quad W = \int (L - K) \cdot dx;$$

ferner

$$P' = K + L + \frac{\partial K_x - \partial L_x}{L - K}; \quad Q' = K \cdot L + \frac{L \cdot \partial K_x - K \cdot \partial L_x}{L - K}.$$

Sind aber P' und Q' auf diese Weise bestimmt, so ist das allgemeine Integral der (1.) jetzt

$$(y_1 + K \cdot y) \cdot e^{\int (L-K) \cdot dx} - c \cdot (y_1 + L \cdot y) = 0.$$

III. Nehmen wir noch die Gleichung

$$1) \qquad \partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x^2 + Q \cdot \partial y_x + R = 0,$$

und suchen wir sie integrabel zu machen durch den Faktor

$$2) \qquad z = J \cdot y_1^2 + K \cdot y_1 + L,$$

wo J, K, L gegebene Funktionen von x und y sind. Multiplizirt man die (1.) mit dem Faktor (2.), und integrirt man nach (III. des §. 342.), so ergiebt sich

$$3) \qquad \tfrac{1}{3} J \cdot y_1^3 + \tfrac{1}{2} K \cdot y_1^2 + L \cdot y_1 + W_{x,y} = C,$$

wo $W_{x,y}$ noch bestimmt werden muß. Differenziirt man nun diese (3.), und vergleicht man das Resultat mit der, mit (2.) multiplizirten Gleichung (1.), so findet man

4) $J \cdot P - \frac{1}{3} \cdot \partial J_y = 0$; 5) $J \cdot Q + K \cdot P - \frac{1}{3} \cdot \partial J_x - \frac{1}{2} \partial K_y = 0$;

6) $J \cdot R + K \cdot Q + L \cdot P - \frac{1}{2} \partial K_x - \partial L_y = 0$;

7) $K \cdot R + L \cdot Q - \partial L_x - \partial W_y = 0$ und 8) $L \cdot R - \partial W_x = 0$.

Um aus den beiden letztern Gleichungen W zu finden, bekommt man noch die Bedingungsgleichung der Integrabilität

9) $$\partial(L \cdot R)_y = \partial(K \cdot R + L \cdot Q - \partial L_x)_x .$$

Aus (4. 5. und 6.) finden sich P, Q und R unmittelbar, während die (9.) die Relation bestimmt, welche zwischen J, K und L statt finden muß, wenn (2.) ein integrirender Faktor der (1.) werden soll.

Man kann auch aus den Gleichungen (4. 5. und 6.) J, K, L in P, Q, R ausgedrückt finden, so daß dann die (9.) die Relation ausdrückt, welche zwischen den gegebenen Funktionen P, Q, R (von x und y) statt finden muß, damit der dann gefundene Faktor (2.) die gegebene (1.) integrabel mache.

Wenden wir dieses auf das Beispiel an, wo die zu integrirende Gleichung diese ist, nämlich

I.1.) $$\partial^2 y + \frac{A \cdot y}{(B \cdot y^2 + C + 2D \cdot x + E \cdot x^2)^2} = 0,$$

wo A, B, C, D, E konstante Koeffizienten seyn sollen. Man hat dasmal

2.2.) $$P = 0; \quad Q = 0; \quad R = \frac{A \cdot y}{(B \cdot y^2 + C + 2D \cdot x + E \cdot x^2)^2};$$

also

3.3.) $$\partial J_y = 0; \quad \tfrac{1}{3} \partial J_x + \tfrac{1}{2} \partial K_y = 0; \quad J \cdot R - \tfrac{1}{2} \partial K_x - \partial L_y = 0.$$

Daraus kann man $J = J_x$, aber bequemer noch

4.4.) $$J = 0; \quad \partial K_y = 0;$$

also K als bloße Funktion von x folgern, während dann die letzte der Gleichungen (3.3.)

5.5.) $$L = X \cdot y$$

dazu liefert, wo X eine solche Funktion von x ist, daß

6.6.) $$\partial K_x + 2X = 0$$

wird. Man findet nun

7.7.) $$W = \frac{-AK}{2B \cdot (B \cdot y^2 + C + 2D \cdot x + E \cdot x^2)} - \tfrac{1}{2} y^2 \cdot \partial X_x,$$

und erhält dann ſtatt der obigen (9.) jetzt

$$8.8.)\quad \frac{A\cdot\partial K_x\cdot(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)-2AK\cdot(D+E\cdot x)}{B\cdot(B\cdot y^2+C+2D\cdot x+E\cdot x^2)^2}+y^2\cdot\partial^2 X_x=0,$$

welcher letztern Gleichung genügt wird, wenn man

$$9.9.)\quad \partial^2 X_x=0,\quad \text{alſo}\quad X=\alpha+\beta x$$

und überdies noch

$$\partial K_x\cdot(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)-2K(D+E\cdot x)=0$$

d. h.

$$10.10.)\quad K=\gamma\cdot(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)$$

nimmt, wo α, β, γ Konſtanten vorſtellen, welche jedoch noch ſo beſtimmt werden müſſen, daß der Gleichung (6.6.), nämlich der Gleichung

$$\partial K_x+2X=0$$

genügt wird, welches, wenn man $\gamma=-1$ nimmt,

$$\alpha=-D;\quad \beta=-E;\quad X=-(D+E\cdot x);\quad L=-y\cdot(D+E\cdot x),$$

und

$$K=C+2D\cdot x+E\cdot x^2$$

liefert; ſo daß der geſuchte integrirende Faktor

$$z=(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)\cdot y_1-y\cdot(D+E\cdot x)$$

ſeyn wird, während dann das allgemeine Integral der (1.1.) nachſtehendes wird, nämlich:

$$11.11.)\quad y_1^2\cdot(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)-2y\cdot y_1\cdot(D+E\cdot x)$$
$$-\frac{A\cdot(C+2D\cdot x+E\cdot x^2)}{B\cdot(B\cdot y^2+C+2D\cdot x+Ex^2)}+E\cdot y^2=c.\ *)$$

---

*) Für den ſpeziellen Fall, wo die gegebene Gleichung

$$\partial^2 y_x+\frac{a^2\cdot y}{(y^2+x^2)^2}=0$$

integrirt werden ſollte, hätte man

$$A=a^2;\quad B=1;\quad C=D=0;\quad E=1;$$

und das Integral würde nun ſeyn:

$$x^2\cdot\partial y_x^2-2x\cdot y\cdot\partial y_x+y^2-\frac{a^2\cdot x^2}{y^2+x^2}=0,$$

oder

$$x\cdot\partial y_x-y=\pm\sqrt{c+\frac{a^2\cdot x^2}{y^2+x^2}}.$$

Weil aber in dieſer Gleichung die Seite links wieder durch den Faktor $\frac{1}{x^2}$ integrabel wird; ſo multiplizire man mit $\frac{1}{x^2}$, ſetze $\frac{y}{x}=u$,

Anmerkg. Diese Beispiele reichen aber aus, um den Geist dieser Arbeiten erfassen, dergleichen nöthigenfalls in anderen gegebenen besonderen Fällen vornehmen, und ihre Durchführung versuchen zu können.

---

und man erhält

$$\frac{\partial x_u}{x^2} = \frac{\pm\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{c\cdot(1+u^2)+a^2}}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{x} = \mp\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{c\cdot(1+u^2)+a^2}}\cdot du + c_1$$

als Ur-Integral mit 2 willkührlichen Konstanten.

Höhere Zahlenlehre.

Achtzehntes Kapitel.

Von der Integration der Ausdrücke mit Ableitungen (der Differenzialfunktionen), welche drei oder mehr Veränderliche enthalten. Bedingungsgleichungen der Integrabilität. Von den hieher gehörigen integrirenden Faktoren oder Multiplikatoren. Integration der totalen Differenzialgleichungen zwischen drei oder mehr Veränderlichen. Wie den letztern durch mehrere Urgleichungen mit willkührlichen Funktionen genügt wird.

Erste Abtheilung.

Fortsetzung der Lehren der ersten Abtheilung des sechszehnten Kapitels, d. h. Ausdehnung jener Lehren auf den Fall, wo drei oder mehr Veränderliche eingehen.

§. 390. Erklärung.

Unter totaler Differenzialgleichung versteht man jede Differenzialgleichung, in welcher bloß Ableitungen (von einem oder von beliebig viel Veränderlichen) nach einem einzigen Veränderlichen x oder t genommen, enthalten sind, es mag übrigens x oder t selbst noch in der Gleichung vorkommen oder

nicht. — Ihr gegenüber steht die früher bereits definirte Parzialgleichung, welche Ableitungen nach zweien oder mehreren Veränderlichen genommen, enthält.

§. 391. Zusatz.

Hieraus folgt:

1) Alle von uns in diesem (VIten) Theile des Systems bisher betrachteten, so wie auch alle im (Kap. XII. des Vten Theils des Systems) behandelten Differenzialgleichungen sind totale Differenzialgleichungen gewesen, meist aber nur zwischen zwei Veränderlichen.

2) Jede Differenzialgleichung zwischen nicht mehr als zwei Veränderlichen ist nothwendig eine totale, weil in ihr nur die Ableitungen des einen Veränderlichen nach dem andern (also nur nach einem einzigen) genommen, vorkommen können.

3) Eine Differenzialgleichung zwischen drei oder mehr Veränderlichen kann dagegen eine totale seyn, d. h. die Ableitungen nur nach einem einzigen Veränderlichen genommen enthalten; kann aber auch eine Parzialgleichung seyn, d. h. Ableitungen nach zwei oder mehr verschiedenen Veränderlichen genommen enthalten.

4) Enthält eine solche totale Differenzialgleichung Ableitungen nach t, aber t selbst nicht, so kann sie zuweilen in eine andere umgeformt werden, welche bloß die übrigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. ꝛc. und bloß Ableitungen von y, z, ꝛc. nach x, also von dem Veränderlichen t keine Spur mehr enthält.

Denkt man sich nämlich in einer Gleichung zwischen x, y, z, ꝛc. und den Ableitungen von y, z, ꝛc. nach x, unter x selbst wieder eine beliebige Funktion eines neuen Veränderlichen t, so hat man nach dem (Kap. III. d. III. Th. d. S.)

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll} \partial y_x = \dfrac{\partial y}{\partial x}; & \partial^2 y_x = \dfrac{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}, \quad \text{ꝛc. ꝛc.} \\ \partial z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}; & \partial^2 z_x = \dfrac{\partial x\cdot\partial^2 z - \partial z\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}, \quad \text{ꝛc. ꝛc.} \end{array}\right\}$$

u. s. w. f., sobald die bloßen ∂ sich auf t beziehen. — Setzt man daher diese Werthe statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ꝛc., ∂z_x, $\partial^2 z_x$ ꝛc. ꝛc. ꝛc., so hat man die gegebene Differenzialgleichung in eine andere verwandelt, welche zwar t selbst nicht, dagegen doch Ableitungen nach t enthält, foglich als eine Differenzialgleichung angesehen werden muß, in welcher, auffer den Veränderlichen x, y, z, ꝛc. ꝛc., auch noch der Veränderliche t vorkommt.

Umgekehrt: setzt man in einer gegebenen Differenzialgleichung zwischen den Veränderlichen x, y, z, ꝛc. ꝛc. und Ableitungen von x, y, z, ꝛc. nach t, überall nach demselben (Kap. III. d. III. Th. d. S.) aus den Gleichungen

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{ll} \partial y = \partial y_x \cdot \partial x; & \partial^2 y = \partial^2 y_x \cdot \partial x^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x; \text{ ꝛc. ꝛc.} \\ \partial z = \partial z_x \cdot \partial x; & \partial^2 z = \partial^2 z_x \cdot \partial x^2 + \partial z_x \cdot \partial^2 x; \text{ ꝛc. ꝛc.} \end{array} \right\}$$

u. s. w. f., wo die bloßen ∂ sich alle auf t beziehen, die Ausdrücke zur Rechten statt der zur Linken stehenden Ableitungen ∂y, $\partial^2 y$, ꝛc. ∂z, $\partial^2 z$, ꝛc. ꝛc. ꝛc., und fallen dann aus der entstehenden Gleichung die Ableitungen ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ꝛc. ꝛc. entweder von selbst oder doch dadurch heraus, daß man sie mit einer Funktion von ∂x, $\partial^2 x$, ꝛc. ꝛc. wegmultiplizirt oder wegdividirt; so hat die neue Gleichung keine Spur mehr von t, und ist bloß als eine Gleichung zwischen den übrigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. ꝛc. anzusehen.

Wenn man aber nachweisen kann, daß, nachdem die eben erwähnte Substitution der Werthe aus (II.) statt gefunden hat, die Ableitungen ∂x, $\partial^2 x$, ꝛc. ꝛc. (welche noch allein nach t genommen sind) aus der entstehenden Gleichung nicht wegfallen können, so ist die gegebene Differenzialgleichung (obgleich t selbst nicht in ihr vorkommt, sondern nur Ableitungen nach t) doch genau als eine solche anzusehen, welche t selbst auch noch enthält, d. h. in welcher ein Veränderlicher t mehr vorkommt.

So reduzirt sich z. B. die Gleichung

1) $$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0,$$

wo Z, Y, X, W Funktionen der 4 Veränderlichen w, x, y, z, wo

aber die Ableitungen ∂z, ∂y, ∂x, ∂w alle nach t genommen gedacht sind, wenn man die Substitutionen aus (II.) vornimmt, d. h. beziehlich

$$\partial z_x \cdot \partial x, \quad \partial y_x \cdot \partial x, \quad \partial w_x \cdot \partial x$$

statt

$$\partial z, \quad \partial y, \quad \partial w$$

substituirt, und zuletzt durch ∂x wegdividirt, auf folgende, nämlich auf

$$Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X + W \cdot \partial w_x = 0,$$

hat nun von t keine Spur mehr, und ist daher nur als eine Gleichung zwischen den 4 Veränderlichen w, x, y und z anzusehen.

Hat man die Gleichung

$$2) \qquad (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}} = a \cdot (\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x),$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach t bedeuten, und setzt man hier statt ∂y, $\partial^2 y$, ihre Werthe aus (II.) zur Rechten, so erhält man augenblicklich

$$(1 + \partial y_x^{\,2})^{\frac{3}{2}} = a \cdot \partial^2 y_x.$$

Diese Gleichung hat nun von t keine Spur mehr, und ist bloß eine Differenzialgleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und y.

Nimmt man aber die Gleichung

$$3) \qquad \partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y = a,$$

wo wiederum die bloßen ∂ Ableitungen nach t bedeuten, und setzt man auch hier statt ∂y und $\partial^2 y$ die Ausdrücke zur Rechten in (II.), so ergiebt sich

$$\partial x \cdot \partial^2 x \cdot (1 + \partial y_x^{\,2}) + \partial x^3 \cdot \partial y_x \cdot \partial^2 y_x = a;$$

und da aus dieser Gleichung auf keine Weise ∂x und $\partial^2 x$ herausfallen können, so ist die Gleichung (3.) nothwendig als eine totale Differenzialgleichung zwischen den 3 Veränderlichen x, y und t anzusehen, welche sich nicht auf eine andere zurückführen läßt, die bloß die beiden Veränderlichen x und y enthält, so daß jede Spur von t verschwunden wäre. *)

---

*) Daß man bei dieser Gleichung (3.) in dem besondern Fall, wo $a = 0$ ist, also bei der Gleichung

$$\partial x \cdot \partial^2 x \cdot (1 + \partial y_x^{\,2}) + \partial x^3 \cdot \partial y_x \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

nach solchen Funktionen y von x fragen kann, welche jeden einzelnen in ihr enthaltenen, und mit Ableitungen von x nach t affizirten Theil zu Null machen, d. h. welche den beiden Gleichungen

$$1 + \partial y_x^{\,2} = 0 \quad \text{und} \quad \partial^2 y_x = 0$$

Anmerkung. Ehe wir aber die totalen Differenzialgleichungen zwischen 3 oder mehr Veränderlichen noch weiter verfolgen, wollen wir wiederum zuvor, genau wie in der ersten Abtheilung des sechszehnten Kapitels vom (§. 339.) ab, die Integration der Differentialfunktionen von drei und mehr Veränderlichen, so wie die Auffindung ihres integrirenden Faktors im Falle sie nicht an sich schon integrabel sind, und ein solcher integrirender Faktor existiren sollte, näher betrachten, und von da erst wieder zu den Differenzialgleichungen übergehen.

A. Integration der Differenzialfunktionen und der totalen Differenzialgleichungen mit drei Veränderlichen.

§. 392. Aufgabe.

Es ist gegeben V als eine Funktion von x, y, z, und den n Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\cdots \partial^n y_x$ von y nach x, so wie noch den m Ableitungen ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\cdots \partial^m z_x$ von z nach x. — Diese Ableitungen seyen wieder durch y_1, y_2, $\cdots y_n$, z_1, z_2, $\cdots z_m$ vorgestellt. — Man soll eine Funktion U von x, y, z und den n—1 Ableitungen ∂y_x, $\cdots \partial^{n-1} y_x$ von y nach x, so wie den m—1 Ableitungen ∂z_x, $\cdots \partial^{m-1} z_x$ von z nach x finden, so daß $\partial U = V$ oder $U = \int V \cdot \partial x$ ist, welche Funktionen von x auch unter y und unter z gedacht werden mögen, unter dem bloßen ∂ aber Ableitungen nach allem x verstanden.

Auflösung. Man verfährt genau wie im (§. 339.), setzt y_x, z_x beziehlich statt y und z, läßt dadurch U und V in U_x und V_x übergehen, findet dann, weil $U_x = \int V_x \cdot dx$ und $\delta U = \int \delta V \cdot dx$ ist, indem man wieder theilweise integrirt,

---

zugleich genügen, fällt dabei in die Augen. Man hat dann aber eine sehr spezielle Frage gestellt, während der Gleichung selbst viel allgemeiner genügt werden kann und muß. (Vergl. Anmerkg. 3. zu §. 282. d. V. Th. d. S.).

$$1)\quad \delta U = \int S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_a})\Big]_{a+b=n} \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_{a+b+1}})_{a+b+c=n-1} \cdot \partial^b \delta y\Big]$$

$$+ \int S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{z_a})\Big]_{a+b=m} \cdot \delta z \cdot dx$$

$$+ S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{z_{a+b+1}})_{a+b+c=m-1} \cdot \partial^b \delta z\Big],$$

so daß man als Bedingungsgleichungen der Integrabilität

außer $$\text{I.}\quad S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_a})\Big]_{a+b=n} = 0$$

auch noch $$\text{II.}\quad S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{z_a})\Big]_{a+b=m} = 0$$

erhält. — Sind die Bedingungsgleichungen erfüllt, so existirt eine solche Funktion U, wie sie gesucht wird, und ist eine einzige derselben nicht erfüllt, so existirt auch kein U in dem Sinne der Aufgabe.

Sind aber die Gleichungen (I. und II.) erfüllt, so wird aus (1.)

$$2)\quad \delta U = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_{a+b+1}})_{a+b+c=n-1} \cdot \partial^b \delta y\Big]$$

$$+ S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{z_{a+b+1}})_{a+b+c=m-1} \cdot \partial^b \delta z\Big],$$

und vergleicht man dies mit dem δU, wie solches sich unmittelbar nach (§. 253. d. V. Th. d. S.) aus dem U ergiebt, nämlich mit

$$3)\quad \partial U = S\Big[\partial U_{y_b} \cdot \partial^b \delta y\Big]_{b+b=n-1} + S\Big[\partial U_{z_b} \cdot \partial^b \delta z\Big]_{b+b=m-1},$$

so erhält man sogleich (nach §. 331.)

$$4)\quad \partial U_{y_b} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_{b+a+1}})\Big]_{a+c=n-1-b}$$

und

$$5) \qquad \partial U_{z_b} = S\Big[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{z_{b+a+1}})\Big]_{a+c=m-1-b},$$

wo in den Gleichungen (4. und 5.) der Buchstabe **b** links und rechts jedesmal einen und denselben Werth hat, wo aber nach und nach in (4.) $0, 1, 2, 3, \cdots n-1$ und in (5.) $0, 1, 2, 3, \cdots m-1$ statt **b** gesetzt werden kann, so daß die Gleichung (4.) n Gleichungen vorstellt und die Werthe der n Ableitungen von U nach y_0 (d. h. y), $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ liefert, während die (5.) wiederum m Gleichungen repräsentirt und die m Ableitungen von U nach z_0 (d. h. z), $z_1, z_2, \cdots z_{n-1}$ giebt, alles in die gegebene Funktion V ausgedrückt.

Aus diesen bekannten ersten Ableitungen von U nach den $m+n$ einzelnen von einander ganz unabhängig gedachten Veränderlichen $y, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, z, z_1, z_2, \cdots z_{m-1}$ wird aber nun U, den (§. §. 296—300. d. V. Th. d. S.) zufolge, ohne weiters gefunden in der Form $U'+X$, so daß

$$\partial U = \partial U' + \partial X = V \quad \text{noch} \quad X = \int (V - \partial U') \cdot dx$$

liefert, als bloße Funktion von x mit noch einer Konstante C, welche auch kein x mehr enthält, ganz analog den (§. §. 339. und 339^b.).

§. 393. Zusatz.

I. Nimmt man statt V diese spezielle Form

$$Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X,$$

wo Z, Y, X Funktionen der 3 Veränderlichen x, y und z vorstellen, so daß diese Differenzial-Funktion hinsichtlich der Ableitungen nur von der ersten Ordnung ist, so werden die beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität (§. 392. I. u. II.) jetzt folgende, nämlich

$$(A)\cdots \qquad (\partial X_y - \partial Y_x) + (\partial Z_y - \partial Y_z) \cdot z_1 = 0,$$

$$(B)\cdots \qquad (\partial X_z - \partial Z_x) + (\partial Y_z - \partial Z_y) \cdot y_1 = 0,$$

und zerfallen noch, wegen der Willkührlichkeit der y_1 und z_1, in die 3 Gleichungen

(C)... $\partial X_y = \partial Y_x$, $\partial X_z = \partial Z_x$ und $\partial Y_z = \partial Z_y$.

II. Diese 3 Bedingungsgleichungen der Integrabilität sind allemal erfüllt, so oft X eine bloße Funktion von x ist, und eben so Y bloß y allein, so wie Z bloß z allein enthält; mit einem Worte, wenn die Veränderlichen getrennt sind; so daß man dann sogleich

$$U = \int V \cdot dx = \int Z \cdot dz + \int Y \cdot \partial y + \int X \cdot dx$$

erhält.

III. Nimmt man aber noch statt V diese andere spezielle Form (der 2ten Ordnung, in Bezug auf die Ableitungen), nämlich

$$P \cdot \partial y_x^2 + Q \cdot \partial y_x \cdot \partial z_x + R \cdot \partial z_x^2 + S \cdot \partial^2 y_x + T \cdot \partial^2 z_x,$$

wo P, Q, R, S, T kein x enthalten, und höchstens Funktionen von y und z seyn sollen, so hat man hier in Vergleich mit (§. 392.), $n = 2$ und auch $m = 2$; und die Bedingungsgleichungen der Integrabilität (§. 392. I. und II.) gehen daemal in folgende drei über, nämlich in

1) $P - \partial S_y = 0$; 2) $R - \partial T_x = 0$; 3) $Q - \partial T_y - \partial S_z = 0$.

Ist z. B. gegeben

$$V = y \cdot \partial^2 z_x - z \cdot \partial^2 y_x,$$

so hat man hier

$$T = y, \quad S = -z \text{ und } P = Q = R = 0.$$

Die eben gefundenen 3 Bedingungsgleichungen der Integrabilität sind daher erfüllt, und das Integral selbst findet sich

$$U = \int V \cdot dx = y \cdot \partial z_x - z \cdot \partial y_x.$$

§. 394. Zusatz.

Ganz auf dieselbe Weise wie im (§. 350.), wo V auser x bloß y und die Ableitungen von y nach x bis zur nten Ordnung hin enthält, die allgemeine Bedingungsgleichung (⊙), nämlich

$$\text{I.} \quad S\Big[(-1)^a \cdot (a+r-1)_{r-1} \cdot \partial^a (\partial V_{y_{a+r-1}})\Big]_{a+b=n-r+1} = 0$$

gefunden worden ist, welche die Existenz eines eben so vielten In-

tegrals von V anzeigt, als sie von auf einander folgenden Werthen 1, 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. von r erfüllt ist, — gerade eben so findet man für die gegenwärtige Funktion V, welche auch noch z und die Ableitungen von z bis zur mten Ordnung hin enthält, auſſer derselben Gleichung (I.), auch noch diese zweite, nämlich

$$\text{II.} \qquad S\Big[(-1)^a\cdot(a+r-1)_{r-1}\cdot\partial^a(\partial V_{z_{a+r-1}})\Big]_{a+b\,=\,m-r+1} = 0.$$

Wenn diese beiden Gleichungen (I. und II.) für die μ auf einander folgenden Werthe $1, 2, 3, 4, \cdots \mu$ von r (also wenn diese 2μ Bedingungen) erfüllt sind, so hat die Funktion V ein μtes Integral

$$J = \int^{\mu} V\cdot dx^{\mu},$$

während y und z ganz unbestimmte Funktionen von x bleiben; und dieses μte Integral enthält μ willkührliche Konstanten, dagegen die Ableitungen von y und z bloß bis beziehlich zur n—μten und m—μten Ordnung hin.

Anmerkg. Wenn man übrigens im (§. 392.) genau wie im (§. 339.) Variationsrechnung zur Lösung der Aufgabe angewandt hat, um die Bedingungsgleichungen der Integrabilität sogleich in ihrer größten Allgemeinheit zu erhalten; so mag man doch nicht übersehen, daß dieselbe Aufgabe des (§. 392.) auch direkt behandelt werden kann, und zwar genau so, wie die einfachere Aufgabe des (§. 339.) im (§. 339^b.) direkt behandelt worden ist.

Ist nämlich V wie im (§. 392.) gegeben, und U so gesucht, daß $\partial U = V$ wird, so folgt aus der Form von ∂U, welche folgende

$$\partial U_x + \partial U_y\cdot y_1 + \partial U_{y_1}\cdot y_2 + \cdots + \partial U_{y_{n-1}}\cdot y_n$$
$$+ \partial U_z\cdot z_1 + \partial U_{z_1}\cdot z_2 + \cdots + \partial U_{z_{m-1}}\cdot z_m$$

ist, daß V zunächst die Form

$$V' + P\cdot y_n + Q\cdot z_m$$

haben muß, wo V', P und Q die höchsten Ableitungen y_n und z_m nicht mehr enthalten. — Hat aber V diese Form, so folgt weiter

$$P = \partial U_{y_{n-1}} \quad \text{und} \quad Q = \partial U_{z_{m-1}};$$

oder

$$U = \int P \cdot dy_{n-1} + U' \quad \text{und} \quad Q = \partial U'_{z_{m-1}} + \int \partial P_{z_{m-1}} \cdot dy_{n-1};$$

demnach $U' = \int (Q - \int \partial P_{z_{m-1}} \cdot dy_{n-1}) \cdot dz_{m-1} + U_1$,

wo jedoch schon wieder die Bedingung erfüllt seyn muß, daß U' also auch $Q - \int \partial P_{z_{m-1}} \cdot dy_{n-1}$ kein y_{n-1} enthalten dürfen. — Hernach hat man

$$\partial U_1 = V - \partial(\int P \cdot dy_{n-1} + \int (Q - \int \partial P_{z_{m-1}} \cdot dy_{n-1}) \cdot dz_{m-1}) = V_1,$$

so daß V_1 kein y_n und kein z_m mehr enthält, und U_1 aus V_1 genau so gefunden werden muß, wie so eben U aus V. — Fährt man aber so ganz analog nach (§. 339b.) fort, so erhält man die gesuchte Funktion U nebst allen Bedingungen der Existenz derselben, wenn letztere nicht (in gegebenen speziellen Beispielen) alle von selbst erfüllt sind.

Es ist interessant eine Anwendung dieses Verfahrens auf den Fall zu sehen, wo, unter der Voraussetzung, daß X, Y und Z gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen x, y und z sind,

1) $$V = X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1$$

gegeben ist, und nun $U_{x,y,z}$ so gefunden werden soll, daß

2) $$\partial U = V \quad \text{d. h.} \quad \partial U_{(x)} = V$$

ist. — Man hat nämlich zunächst die beiden Gleichungen

3) $\partial U_y = Y$ und 4) $\partial U_z = Z$.

Aus der (4.) folgt sogleich

5) $$U = \int_{z \div \gamma} Z \cdot dz + U'_{x,y};$$

wo γ von x, y, z unabhängig aber beliebig gedacht ist, und wo U' die Konstante nach z ist, also bloß eine Funktion von x und y seyn kann.

Setzt man nun diesen Werth in die (3.), so ergiebt sich

6) $$\partial U'_y = Y - \int_{z \div \gamma} \partial Z_y \cdot dz.$$

Integrirt man hier nach y, und läßt man dabei die Integrale mit $y = \beta$ anfangen, so erhält man

7) $U' = \int_{y \div \beta} Y \cdot dy - \int_{z \div \gamma} (Z_{x,y,z} - Z_{x,\beta,z}) \cdot dz + U_1$, *)

wo β von x, y und z unabhängig übrigens beliebig gedacht wird, und wo U_1 die Konstante vorstellt, also höchstens noch eine Funktion von x allein seyn kann. Weil aber in (6.) zur Rechten kein z vorkommen darf, so muß die Ableitung dieses Ausdrucks nach z der Null gleich seyn; und so erhält man die erste Bedingungsgleichung

I. $$\partial Y_z - \partial Z_y = 0.$$

Setzt man aber diesen Werth von U′ aus (7.) in die Gleichung (5.), so erhält man

8) $$U = \int_{y \div \beta} Y \cdot dy + \int_{z \div \gamma} Z_{x,\beta,z} \cdot dz + U_1.$$

Daraus folgt aber

9) $$\partial U_1 = V - \partial\left(\int_{y \div \beta} Y \cdot dy + \int_{z \div \gamma} Z_{x,\beta,z} \cdot dz\right).$$

Weil jedoch, so oft P eine Funktion von x, y und z ist, während y und z selber wieder Funktionen von x sind, allemal $\partial P = \partial P_x + \partial P_y \cdot y_1 + \partial P_z \cdot z_1$ ist, so hat man danach und nach (§. §. 219—224. d. V. Thl. d. S.)

$$\partial\left(\int_{y \div \beta} Y \cdot dy\right) = \int_{y \div \beta} \partial Y_x \cdot dy + y_1 \cdot Y + z_1 \cdot \int_{y \div \beta} \partial Y_z \cdot dy$$

und

$$\partial\left(\int_{z \div \gamma} Z_{x,\beta,z} \cdot dz\right) = \int_{z \div \gamma} (\partial Z_x)_{x,\beta,z} \cdot dz + z_1 \cdot Z_{x,\beta,z}.$$ **)

Diese Werthe und den Werth von V in (9.) substituirt, geben

10) $$\partial U_1 = X - \int_{y \div \beta} \partial Y_x \cdot dy - \int_{z \div \gamma} (\partial Z_x)_{x,\beta,z} \cdot dz,$$

in so so ferne das mit z_1 affizirte Glied, welches noch eingeht, wegen der (I.) der Null gleich wird. ***)

---

*) Das Zeichen $Z_{x,\beta,z}$ drückt das aus, was aus der Funktion Z oder $Z_{x,y,z}$ wird, wenn man β statt y setzt.

**) ∂Z_x ist, wie Z selbst, im Allgemeinen eine Funktion von x, y, z. Der Ausdruck $(\partial Z_x)_{x,\beta,z}$ soll nun das bedeuten, was aus dieser Funktion ∂Z_x wird, wenn man x und z stehen läßt, aber überall β statt y schreibt.

***) Es hat nämlich dieses Glied den Faktor

Da nun diese Funktion U_1 kein y und kein z mehr enthalten darf, so muß man allemal 0 (Null) erhalten, man mag den Ausdruck zur Rechten in der Gleichung (10.) nach y oder nach z differenziiren, d. h. man hat

II. $$\partial X_y - \partial Y_x = 0$$

und

11) $$\partial X_z - (\partial Z_x)_{x,\beta,z} - \int_{\div\beta} \partial^{1,1} Y_{x,z} \cdot dy = 0.$$

Differenziirt man aber die (I.) nach allem x, so erhält man

$$\partial^{1,1} Y_{x,z} - \partial^{1,1} Z_{x,y} = 0,$$

und nimmt man hiervon das Integral nach y, zwischen den Grenzen β und y, so ergiebt sich weiter

12) $$\int_{y\div\beta} \partial^{1,1} Y_{x,z} \cdot dy - \partial Z_x + (\partial Z_x)_{x,\beta,z} = 0.$$

Eliminirt man zuletzt aus (12. und 11.) das angezeigte Integral, so ergiebt sich

III. $$\partial X_z - \partial Z_x = 0.$$

Sind nun diese 3 Bedingungsgleichungen (I. II. und III.) (dieselben, welche schon im §. 393. I. gefunden worden sind) erfüllt; so erhält man aus (10.) weiter, wenn auch α von x, y u. z unabhängig übrigens beliebig gedacht wird,

13) $$U_1 = \int_{x\div\alpha} X \cdot dx - \int_{y\div\beta} Y \cdot dy + \int_{y\div\beta} Y_{\alpha,y,z} \cdot dy - \int_{z\div\gamma} Z_{x,\beta,z} \cdot dz + \int_{z\div\gamma} Z_{\alpha,\beta,z} \cdot dz + C.$$

Setzt man endlich diesen Werth von U_1 in die Gleichung (8.), so hat man

14) $$U = \int_{x\div\alpha} X \cdot dx + \int_{y\div\beta} Y_{\alpha,y,z} \cdot dy + \int_{z\div\gamma} Z_{\alpha,\beta,z} \cdot dz + C,$$

wo C eine von x, y und z unabhängige übrigens willkührliche Konstante ist.

$$Z - Z_{x,\beta,z} - \int_{y\div\beta} \partial Y_z \cdot dy.$$

Aber aus der (I.) folgt, wenn man nach y integrirt,

$$Z - \int \partial Y_z \cdot dy = Const.;$$

also, wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen β und y nimmt,

$$Z - Z_{x,\beta,z} - \int_{y\div\beta} \partial Y_z \cdot dy = 0.$$

Wenn man will, kann man dabei auch $\alpha = \beta = \gamma = 0$ setzen.

Ist z. B. gegeben der Ausdruck

$$V = 2x \cdot y^3 \cdot z + z + (3x^2 \cdot y^2 \cdot z) \cdot y_1 + (x^2 \cdot y^3 + x + n \cdot z^{n-1}) \cdot z_1 ;$$

so hat man

$$X = 2x \cdot y^3 \cdot z + z; \quad Y = 3x^2 \cdot y^2 \cdot z \quad \text{und} \quad Z = x^2 \cdot y^3 + x + n \cdot z^{n-1},$$

und die 3 Bedingungsgleichungen (I. II. III.) finden sich erfüllt. — Man hat nun

$$Y_{\alpha,\gamma,z} = 3\alpha^2 \cdot \gamma^2 \cdot z; \quad Z_{\alpha,\beta,z} = \alpha^2 \cdot \beta^3 + \alpha + n \cdot z^{n-1};$$

folglich

$$\int_{x \div \alpha} X \cdot dx = x^2 \cdot y^3 \cdot z + x \cdot z - \alpha^2 \cdot y^3 \cdot z - \alpha \cdot z;$$

$$\int_{y \div \beta} Y_{\alpha,y,z} \cdot dy = \alpha^2 \cdot y^3 \cdot z - \alpha^2 \cdot \beta^3 \cdot z;$$

und

$$\int_{z \div \gamma} Z_{\alpha,\beta,z} \cdot dz = (\alpha^2 \cdot \beta^3 + \alpha) \cdot z + z^n - (\alpha^2 + \beta^3 + \alpha) \cdot \gamma - \gamma^n.$$

Und es wird daher

$$U = x^2 \cdot y^3 \cdot z + x \cdot z - z^n - (\alpha^2 \cdot \beta^3 + \alpha)\gamma - \gamma^n + C,$$

oder

$$U = x^2 \cdot y^3 \cdot z + x \cdot z - z^n + C,$$

wenn man alle konstanten Theile in die allgemeine Konstante C mit aufgenommen sich denkt. —

Hätte man übrigens gleich anfänglich $\alpha = \beta = \gamma = 0$ genommen, so wären die Rechnungen viel einfacher geworden.

Es bedarf wohl übrigens keines besondern Hervorhebens, daß wir diese Methode auf diesen Fall, wo $V = X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1$ ist, nur der Rechnungen wegen, die den Anfänger üben können, mitgetheilt haben. — An sich kann dieser Fall, wo

$$V = X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1$$

gegeben ist, dadurch am allereinfachsten behandelt werden, daß man in die Gleichung

$$\partial U = V, \text{ d. h. } \partial U_x + \partial U_y \cdot y_1 + \partial U_z \cdot z_1 = V,$$

statt V den gegebenen Werth setzt, wodurch die Gleichung sogleich, wegen der Willührlichkeit der Ableitungen y_1 und z_1, in die drei Gleichungen

$$\partial U_x = X; \quad \partial U_y = Y \text{ und } \partial U_z = Z$$

zerfällt. — Integrirt man dann diese 3 Parzialgleichungen nach (§. 300. des V. Th. d. S.), oder vielmehr, nimmt man das dort bereits dafür gefundene Integral (nur U, X, Y, Z gesetzt, wo dort beziehlich u, M, N, P steht); so hat man dieselben Bedingungsgleichungen der Integrabilität und auch dasselbe Endresultat für U, wie solches hier oben gefunden worden ist.

§. 395. Aufgabe und Auflösung.

Genügt aber die gegebene Funktion V des (§. 392.) den daselbst gefundenen Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht; so fragt es sich wieder, ob man nicht einen integrirenden Faktor ξ finden könne, welcher nach den Ableitungen von y von der n—1sten Ordnung, nach den Ableitungen von z aber von der m—1sten Ordnung seyn dürfte, und welcher so wäre, daß das Produkt $\xi \cdot V$ integrabel wird, d. h. den Bedingungen der Integrabilität (des §. 392.) genügt. — Dieser integrirende Faktor ist aber gegeben durch die beiden Gleichungen (§. 392. I. II.), wenn daselbst $\xi \cdot V$ statt V gesetzt wird, also durch die Gleichungen

$$\text{I.} \quad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a\left(\partial(\xi \cdot V)_{y_a}\right)\right]_{a+b=n} = 0,$$

$$\text{II.} \quad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a\left(\partial(\xi \cdot V)_{z_a}\right)\right]_{a+b=m} = 0,$$

welche wiederum in mehrere einzelne Gleichungen zerfallen können, die in Bezug auf ξ als einer Funktion von n+m von einander unabhängig gedachter Veränderlichen

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1},\ z,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{m-1}$$

Parzialgleichungen sind, und nach den (§. §. 296—300 und §. §. 323—326. d. V. Th. d. S.) der Integration unterworfen werden müssen.

Weil aber diese Integration nach den eben angeführten (§. §) auf's neue zu Bedingungsgleichungen der Integrabilität führt, so wird vielleicht nicht immer ein solcher integrirender

Faktor ξ existiren, wie er hier gesucht wird. — Die Bedingungsgleichungen für die Existenz eines solchen integrirenden Faktors ξ wird man aber zum Theil oder alle erhalten, wenn man aus den beiden Gleichungen (I. und II.) jede Spur von ξ eliminirt.

Endlich werden selbst dann, wenn diese Bedingungsgleichungen der Existenz eines solchen integrirenden Faktors ξ von dem gegebenen V erfüllt sind, meistens bloß glückliche Versuche ihn finden lassen.

§. 396. Zusatz.

Ist V in Bezug auf die Ableitungen von y und z nur von der ersten Ordnung, so werden die beiden Gleichungen (§. 392. I. II.), welche den integrirenden Faktor ξ bestimmen, bloß folgende seyn, nämlich

$$\text{I.} \qquad \partial(\xi \cdot V)_y - \partial\big(\partial(\xi \cdot V)_{y_1}\big) = 0$$

$$\text{II.} \qquad \partial(\xi \cdot V)_z - \partial\big(\partial(\xi \cdot V)_{z_1}\big) = 0.$$

Ist in's besondere gegeben die Funktion

$$V = Z \cdot dz_x + Y \cdot dy_x + X,$$

wo Z, Y, X gegebene Funktionen der 3 Veränderungen x, y und z sind, so werden diese beiden Gleichungen (I. u. II.) zur Bestimmung des integrirenden Faktors ξ, jetzt in folgende übergehen, nämlich in

$$\text{III.} \quad [(\partial X_y - \partial Y_x) + (\partial Z_y - \partial Y_z) \cdot z_1] \cdot \xi - Y \cdot \partial \xi_x + (X + Z \cdot z_1) \cdot \partial \xi_y - Y \cdot z_1 \cdot \partial \xi_z = 0,$$

$$\text{IV.} \quad [(\partial X_z - \partial Z_x) + (\partial Y_z - \partial Z_y) \cdot y_1] \cdot \xi - Z \cdot \partial \xi_x + (X + Y \cdot y_1) \cdot \partial \xi_y - Z \cdot y_1 \cdot \partial \xi_z = 0.$$

Diese zerfallen aber wieder, wegen des beliebig und unabhängig von einander gedachten y_1 und z_1, in die folgenden 3 Gleichungen

$$1) \qquad (\partial X_y - \partial Y_x) \cdot \xi - Y \cdot \partial \xi_x + X \cdot \partial \xi_y = 0$$

$$2) \qquad (\partial Z_y - \partial Y_z) \cdot \xi - Y \cdot \partial \xi_z + Z \cdot \partial \xi_y = 0$$

3) $$(\partial X_z - \partial Z_x)\cdot\xi - Z\cdot\partial\xi_x + X\cdot\partial\xi_z = 0.$$ *)

Und eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen sowohl $\partial\xi_x$ als auch $\partial\xi_y$, so fällt $\partial\xi_z$ und ξ ebenfalls mit weg, und man erhält **)

$$(\odot)\cdots \quad X\cdot(\partial Y_z - \partial Z_y) + Y\cdot(\partial Z_x - \partial X_z) + Z\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung muß vor allen Dingen von den gegebenen Funktionen X, Y, Z erfüllt seyn, wenn aus den Gleichungen (1—3.) der integrirende Faktor ξ soll gefunden werden können, oder vielmehr, wenn er überhaupt existiren soll.

Anmerkung. Für die Funktion

$$X'\cdot Y'\cdot Z\cdot\partial z_x + X'\cdot Y\cdot Z'\cdot\partial y_x + X\cdot Y'\cdot Z'$$

ist dagegen der Quotient

$$\frac{1}{X'\cdot Y'\cdot Z'} = \xi$$

der integrirende Faktor, sobald X und X′ bloß x allein, Y und Y′ bloß y allein, endlich Z und Z′ bloß z allein enthalten; weil solcher Faktor die Trennung der Variablen bewirkt. (Vgl. §. 393. II.).

§. 397. Zusatz.

Wäre V von der nten Ordnung nach y und von der mten Ordnung nach z, wie im (§. 392.), aber sowohl nach y und deren Ableitungen, als auch nach z und deren Ableitungen lineär, d. h. wäre

---

*) Diese 3 Gleichungen gehen natürlich auch aus den 3 Bedingungsgleichungen der Integrabilität (§. 393. I. C.) hervor, wenn statt der dortigen X, Y, Z beziehlich die Produkte $\xi\cdot X$, $\xi\cdot Y$, $\xi\cdot Z$ gesetzt werden.

**) Diese Elimination bewerkstelligt sich hier am leichtesten, wenn man jede der 3 Gleichungen (1—3.) mit demjenigen der 3 Buchstaben X, Y, Z multiplizirt, welchen sie selbst nicht enthält, und die entstehenden Gleichungen addirt, wobei es jedoch nöthig werden kann, vorher in der einen oder der andern dieser Gleichungen alle Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen zu schreiben.

$$V = X + A_0 \cdot y + A_1 \cdot \partial y_x + A_2 \cdot \partial^2 y_x + \cdots + A_n \cdot \partial^n y_x$$
$$+ B_0 \cdot z + B_1 \cdot \partial z_x + B_2 \cdot \partial^2 z_x + \cdots + B_m \cdot \partial^m z_x,$$

wo X, A_0, A_1, $\cdots$ A_n, B_0, B_1, $\cdots$ B_m höchstens x allein enthalten, so würde der gesuchte integrirende Faktor ξ wieder bloß x allein enthalten, aber nun aus den beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad A_0 \cdot \xi - \partial(A_1 \cdot \xi) + \partial^2(A_2 \cdot \xi) - \cdots \pm \partial^n(A_n \cdot \xi) = 0$$

und $$\text{II.}\quad B_0 \cdot \xi - \partial(B_1 \cdot \xi) + \partial^2(B_2 \cdot \xi) - \cdots \pm \partial^m(B_m \cdot \xi) = 0$$

gefunden werden müssen. — Und $U = \int (V \cdot \xi) \cdot dx$ wird dann genau so gefunden, wie (§. 349. R. 2.) steht, nur daß hier ξ zu stehen kommt, wo dort z steht, und daß hier die Glieder

$$[B_1 \cdot \xi - \partial(B_2 \cdot \xi) + \partial^2(B_3 \cdot \xi) - \cdots \mp \partial^{m-1}(B_m \cdot \xi)] \cdot z$$
$$+ [B_2 \cdot \xi - \partial(B_3 \cdot \xi) + \cdots \pm \partial^{m-2}(B_m \cdot \xi)] \cdot \partial z_x$$
$$+ [B_3 \cdot \xi - \cdots \pm \partial^{m-3}(B_m \cdot \xi)] \cdot \partial^2 z_x$$
$$+ \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$\vdots$$
$$+ [B_m \cdot \xi] \cdot \partial^{m-1} z_x$$

noch hinzugefügt werden müssen.

§. 398. Zusatz.

I. Eine Funktion V, wie sie im (§. 392.) gedacht worden ist, d. h. eine Funktion V von x, y, y_1, $\cdots$ y_n, z, z_1, $\cdots$ z_m, genügt nicht den beiden im (§. 392.) gefundenen Bedingungsgleichungen der Integrabität, ist also nicht an sich integrabel (während y und z ganz unbestimmte Funktionen von x bleiben sollen), noch hat sie einen integrirenden Faktor ξ, wie solcher nach (§. 395.) gesucht worden ist, so lange nicht diese Funktion V die Form

$$Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m$$

hat, wo Q, P, R weder y_n noch z_m enthalten. (Vgl. Anmerkg. zu §. 394.).

II. Hat aber die Funktion V diese Form $Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m$, so ist sie deshalb noch nicht integrabel, auch hat sie deshalb noch keinen integrirenden Faktor ξ, für dessen Existenz selbst noch zwi-

schen den gegebenen Funktionen Q, P, R gewisse Bedingungsgleichungen erfüllt seyn müssen, wie der einfachste Fall im (§. 396.) gezeigt hat.

III. Ist nun nicht die Funktion V, sondern die totale Differenzialgleichung zwischen drei Veränderlichen

$$V = 0$$

gegeben, so kann man solche zunächst nach z_m algebraisch auflösen: also kann man sie allemal auf die Form

$$S + R \cdot z_m = 0$$

bringen, wo S und R kein z_m mehr enthalten. Isolirt sich nun in S die Ableitung y_n von selbst, so daß S die Form hat $Q + P \cdot y_n$, während Q und P weder y_n noch z_m enthalten, und enthält zugleich auch R nicht mehr y_n; so hat die Gleichung $V = 0$ die Form

$$Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m = 0$$

angenommen, wo Q, P und R weder y_n noch z_m mehr enthalten. Wird nun diese Funktion $Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m$ statt V gesetzt, so kann nach (II.) diese neue Funktion V entweder an sich integrabel seyn, oder doch einen integrirenden Faktor ξ haben, je nachdem die Funktionen Q, P, R so sind, daß den beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität des (§. 392.), oder so sind, daß den Bedingungsgleichungen der Existenz des Faktors ξ genügt ist, (wie letztere aus den beiden Gleichungen des §. 395. dann hervorgehen, wenn man jede Spur von z eliminirt).

IV. Existirt aber dann für die Funktion $V = Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m$ wirklich ein integrirender Faktor ξ *), so kann man die Gleichung

$$U = \int (\xi \cdot V) \cdot dx = C,$$

oder

$$U = 0,$$

---

*) Im Falle daher $Q + P \cdot y_n + R \cdot z_m$ an sich integrabel seyn sollte, wäre $\xi = 1$ zu nehmen.

wenn man die willkührliche Konstante C in die Funktion U bereits mit aufgenommen sich denkt, als das allgemeine erste Integral der totalen Differenzialgleichung $V = 0$ ansehen.

V. Lößt man diese ebenfalls totale Differenzialgleichung $U = 0$ zwischen drei Veränderlichen, wiederum nach der höchsten z_{m-1} der Ableitungen von z algebraisch auf, und sondert sich dann wieder die höchste y_{n-1} der Ableitungen von y von selber so ab, daß die Gleichung

$$U = 0$$

die Form $$Q' + P' \cdot y_{n-1} + R' \cdot z_{m-1} = 0$$

annimmt, wo Q', P' und R' weder y_{n-1} noch z_{m-1} enthalten: so kann man wieder den integrirenden Faktor ξ_1 für diese Funktion $Q' + P' \cdot y_{n-1} + R' \cdot z_{m-1}$ aufsuchen; und wenn Q', P', R' so sind, daß ein solcher Faktor ξ_1 wirklich existirt, so ist wiederum die Gleichung

$$T = \int \xi_1 \cdot (Q' + P' \cdot y_{n-1} + R' \cdot z_{m-1}) \cdot dx = C_1,$$

oder

$$T = 0,$$

wenn man die willkührliche Konstante C_1 bereits in T mit aufgenommen sich denkt, das allgemeine erste Integral von $U = 0$, also mit Recht das allgemeine zweite Integral von $V = 0$ zu nennen.

V. Auf demselben Wege kann man nun auch versuchen, zu einem allgemeinen 3ten, 4ten, mten Integral von $V = 0$ zu gelangen, welches letztere m willkührliche Konstanten in sich aufgenommen haben, dagegen bloß z allein und keine Ableitung von z, so wie die Ableitungen von y bloß noch bis zu y_{n-m} enthalten wird.

VI. Sollte aber die Funktion V im Sinne des (§. 394.) ein μtes Integral haben, so wäre

$$J = \int^{\mu} V \cdot dx^{\mu} = 0$$

unmittelbar das allgemeine μte Integral der gegebenen totalen Differenzialgleichung

$$V = 0$$

zwischen 3 Veränderlichen mit μ willkührlichen Konstanten, und es wäre dann, um zu diesem μten Integral zu gelangen, weder nöthig, integrirende Faktoren zu finden, noch die Zwischen-Integrale $U = 0$, $T = 0$ ꝛc. ꝛc. vorher so umzuformen, daß in ihnen die höchsten Ableitungen von y und z isolirt erscheinen, weil sich dies letztere von selbst einfinden wird.

Beispiel 1. Ist gegeben die Differenzialgleichung

1) $$V = \partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y - a \cdot \partial y^2 = 0,$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach dem dritten Veränderlichen x vorstellen *), und wo also

2) $$V = y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 - a \cdot y_1^2$$

ist, so ist hier schon V in der in (I.) als nothwendig erkannten Form. — **) Die beiden Gleichungen (§. 395. I. und II.) zur Bestimmung des integrirenden Faktors ξ werden nun

---

*) Setzt man in dieser Gleichung nach Anleitung des (§. 391.) $\partial z_y \cdot \partial y$ statt ∂z, und $\partial^2 z_y \cdot \partial y^2 + \partial z_y \cdot \partial^2 y$ statt $\partial^2 z$, so geht sie über in folgende, nämlich

$$\partial^2 z_y \cdot \partial y^3 + a \cdot \partial y^2 = 0,$$

und ist daher, so lange nicht a den Werth Null hat, durchaus nicht als eine Gleichung zwischen nur zwei Veränderlichen z und y anzusehen.

**) Wäre die Gleichung (1.) in dieser Form

$$1 - \frac{\partial z \cdot \partial^2 y}{\partial y \cdot \partial^2 z} - a \frac{\partial y}{\partial^2 z} = 0$$

oder in dieser andern Form

$$\frac{\partial y \cdot \partial^2 z}{\partial^2 y} - \partial z - a \cdot \frac{\partial y^2}{\partial^2 y} = 0$$

gegeben gewesen, so hätte man die Gleichung jedesmal erst nach $\partial^2 z$ algebraisch aufgelößt, und jedesmal

$$\partial^2 z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \partial^2 y + a \cdot \partial y$$

oder $$\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y - a \cdot \partial y^2 = 0$$

erhalten. (Vgl. §. 398. III.).

3) $$\partial(\xi\cdot V)_y - \partial(\partial(\xi\cdot V)_{y_1}) + \partial^2(\partial(\xi\cdot V)_{y_2}) = 0$$

und

4) $$\partial(\xi\cdot V)_z - \partial(\partial(\xi\cdot V)_{z_1}) + \partial^2(\partial(\xi\cdot V)_{z_2}) = 0.$$

Wenn man aber bedenkt, daß ξ kein y_2 und kein z_2 enthalten soll, daß also $\partial\xi_{y_2} = \partial\xi_{z_2} = 0$, und daß auch

$$\partial V_y = 0 \quad ; \qquad \partial V_z = 0 \quad ;$$

$$\partial V_{y_1} = z_2 - 2a\cdot y_1 ; \qquad \partial V_{z_1} = -y_2 ;$$

$$\partial V_y = -z_1 \quad ; \text{ so wie } \partial V_z = y_1$$

ist, so gehen diese Gleichungen (3. u. 4.) sogleich in folgende über:

5) $$(y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2 - a\cdot y_1^2)\cdot\partial\xi_y - \partial\big((y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2 - a\cdot y_1^2)\cdot\partial\xi_{y_1} + (z_2 - 2ay_1)\cdot\xi\big) - \partial^2(z_1\cdot\xi) = 0$$

und

6) $$(y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2 - a\cdot y_1^2)\cdot\partial\xi_z - \partial\big((y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2 - a\cdot y_1^2)\cdot\partial\xi_{z_1} - y_2\cdot\xi\big) + \partial^2(y_1\cdot\xi) = 0.$$

Verrichtet man hier die angezeigten Differenziationen nach allem x, substituirt man dann statt $\partial\xi$ oder $\partial\xi_{(x)}$ ihren Werth

$$\partial\xi_x + \partial\xi_y\cdot y_1 + \partial\xi_{y_1}\cdot y_2 + \partial\xi_z\cdot z_1 + \partial\xi_{z_1}\cdot z_2,$$

so wie statt $\partial^2\xi$ oder $\partial^2\xi_{(x)}$ den zugehörigen Werth (in Parzialableitungen ausgedrückt), so hat man die beiden Parzialgleichungen, denen ξ zu genügen hat.

So weit, um zu zeigen, wie die Rechnungen ausgeführt werden müssen, und wie höchst verwickelt sie werden. An ein systematisches Auffinden des Faktors ξ aus diesen beiden Parzialgleichungen der 2ten Ordnung, etwa nach Anleitung der (§. §. 323—326. d. V. Th. d. S.), ist, der Weitläufigkeit der Rechnungen wegen, gar nicht zu denken; und so muß man sich begnügen, bei dem Anblick der Gleichung (1.) zu vermuthen, daß $\frac{1}{\partial y}$ oder $\frac{1}{\partial y^2}$ der integrirende Faktor ξ seyn möchte. In der That genügt

7) $$\xi = \frac{1}{y_1^2}$$

beiden Gleichungen (5. und 6.), in so ferne nun

$$\partial\xi_y = \partial\xi_z = \partial\xi_{z_1} = 0 \quad \text{und} \quad \partial\xi_{y_1} = -\frac{2}{y_1^3} \quad \text{ist.}$$

Ist nun $U = \int(\xi \cdot V) \cdot dx$, so folgt aus den Gleichungen (4. und 5. des §. 392.), wenn man dem b daselbst die Werthe 0 und 1 beilegt, weil y selbst unter y_0 verstanden wird

8) $$\partial U_y = \partial(\xi \cdot V)_{y_1} - \partial\left(\partial(\xi \cdot V)_{y_2}\right) = 0;$$

9) $$\partial U_z = \partial(\xi \cdot V)_{z_1} - \partial\left(\partial(\xi \cdot V)_{z_2}\right) = 0;$$

10) $$\partial U_{y_1} = \partial(\xi \cdot V)_{y_2} = \xi \cdot \partial V_{y_2} = -\frac{z_1}{y_1^2};$$

11) $$\partial U_{z_1} = \partial(\xi \cdot V)_{z_2} = \xi \cdot \partial V_{z_2} = \frac{1}{y_1};$$

Integrirt man nun diese Gleichungen nach den (§. §. 296—300. d. V. Th. d. S.), so erhält man

12) $$U = \frac{z_1}{y_1} + X,$$

wo X bloß noch x enthält. — Weil aber dieses U der Gleichung (1.) zu genügen hat, so substituire man diesen Werth statt U in diese (1.), und man erhält

13) $$\partial X = -a; \quad \text{also} \quad X = -ax + C.$$

Also hat man als allgemeines erstes Integral der Gleichung

1) $$\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y - a \cdot \partial y^2 = 0$$

gefunden die Gleichung

14) $$\partial z - (ax + C) \cdot \partial y = 0.$$ *)

---

*) In allen solchen Fällen, wo man den integrirenden Faktor ξ vermuthet, wie hier $\xi = \frac{1}{y_1^2}$, thut man allemal am besten, auf diese Vermuthung hin $U = \int(\xi \cdot V) \cdot dx$ aus der Gleichung $\partial U = \xi \cdot V$ nach (Anmerkg. zu §. 394.) direkt zu finden. Dieses giebt hier

1) $$\partial U_x + \partial U_y \cdot y_1 + \partial U_z \cdot z_1 + \partial U_{y_1} \cdot y_2 + \partial U_{z_1} \cdot z_2 = \frac{y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2}{y_1^2} - a,$$

und daraus folgt, weil y_1 und z_1 willkührlich bleiben müssen,

2) $$\partial U_x + \partial U_y \cdot y_1 + \partial U_z \cdot z_1 = -a$$

und

3) $$\partial U_{y_1} = -\frac{z_1}{y_1^2}, \quad \text{so wie} \quad 4) \quad \partial U_{z_1} = \frac{1}{y_1}.$$

Aus der (4.) folgt nun

Beispiel 2. Soll nun diese zuletzt erhaltene Gleichung

1) $V = \partial z - (ax + C)\cdot\partial y = 0$, wo $V = z_1 - (ax + C)\cdot y_1$ ist, wiederum integrirt werden, so sind jetzt die beiden Gleichungen (I. und II. des §. 395.) zur Bestimmung des integrirenden Faktors ξ_1, der jetzt keine Ableitung von y und z mehr enthalten soll, diese:

2) $\partial(\xi_1\cdot V)_y - \partial\left(\partial(\xi_1\cdot V)_{y_1}\right) = 0$ oder $V\cdot\partial(\xi_1)_y + \partial\left((ax + C)\cdot\xi_1\right) = 0$

und

3) $\partial(\xi_1\cdot V)_z - \partial\left(\partial(\xi_1\cdot V)_{z_1}\right) = 0$ oder $V\cdot\partial(\xi_1)_z - \partial\xi_1 = 0$;

oder, wenn man hier statt

$\partial\xi_1$ seinen Werth $(\partial\xi_1)_x + \partial(\xi_1)_y\cdot y_1 + \partial(\xi_1)_z\cdot z_1$

substituirt,

4) $a\cdot\xi_1 + (ax + C)\cdot\partial(\xi_1)_x + \partial(\xi_1)_y\cdot y_1\cdot z_1 + (ax + C)\cdot\partial(\xi_1)_z\cdot z_1 = 0$

und

5) $\partial(\xi_1)_x + \partial(\xi_1)_y\cdot y_1 + \left(z_1 - (ax + C)\cdot y_1\right)\cdot\partial(\xi_1)_z\cdot z_1 = 0.$

Und diesen beiden Gleichungen genügt bloß

$$\xi_1 = 0.$$

Also hat die gegebene Differenzialgleichung dasmal keinen integrirenden Faktor. *) Folglich hat auch die totale Differenzialgleichung

---

5) $$U = \int \frac{1}{y_1}\cdot dz_1 = \frac{z_1}{y_1} + f_{y_1,y,z,x}.$$

Dieser Werth in die (3.) substituirt, giebt

6) $$\partial f_{y_1} = 0;$$

also daß f bloß x, y und z enthalten kann.

Dieser Werth $\frac{z_1}{y_1} + f_{x,y,z}$ statt U in die (2.) substituirt giebt

7) $$\partial f_x + \partial f_y\cdot y_1 + \partial f_z\cdot z_1 = -a,$$

woraus, wegen der Willkührlichkeit von y_1 und z_1 sogleich

8) $\partial f_x = -a$; 9) $\partial f_y = 0$ und 10) $\partial f_z = 0$;

also

11) $$f = -ax + b$$

hervorgeht, wo C eine willkührliche Konstante ist, die jedoch von x eben so unabhängig seyn muß, als sie von y und z unabhängig ist.

*) Da die hier gegebene Gleichung

$$\partial z_x - (ax + C)\cdot\partial y_x = 0$$

kein allgemeines Integral in dem Sinne der (Nr. IV. des §. 398.).

Mithin hat auch die in dem (Beispiel 1.) gegebene Differenzialgleichung

$$\partial y_x\cdot\partial^2 z_x - \partial z_x\cdot\partial^2 y_x - a\cdot\partial y_x^2 = 0$$

kein allgemeines zweites Integral im Sinne der (N. V. d. §. 398.).

Nach diesen Beispielen wird es aber dem Leser leicht werden, für die übrigen Nummern dieses (§. 398.) selber Beispiele sich zu bilden.

Anmerkg. Man konnte auch hier wieder genau so verfahren, wie in der Anmerkg. zu (§. 350.) geschehen ist, nämlich bei der Aufsuchung des integrirenden Faktors ξ für V, und, wenn

$$U = \int(\xi\cdot V)\cdot dx = 0$$

bereits schon die rechte Form $Q' + P'\cdot y_{n-1} + R'\cdot z_{m-1} = 0$ haben sollte, bei der Auffindung des integrirenden Faktors ξ_1 für U, u. s. w. f., die Gleichungen

$$V = 0, \qquad U = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

selbst wieder benutzen. — Man bekam dann zur Bestimmung von ξ die dortige Gleichung (A.) genau wieder, nur hier ξ statt des z gesetzt; ausserdem aber noch eine zweite Gleichung (A'.), welche aus der (A.) hervorgeht, wenn man statt der Ableitungen nach y, die nach z setzt, und in der Gleichung $c + d + b = n$, jetzt m statt n substituirt. — Ferner bekam man zur Bestimmung des andern Faktors ξ_1 dieselbe Gleichung (B.), auch dieselbe Glei-

---

$$\partial z - (ax + C)\cdot\partial y = 0$$

die im (§. 396.) behandelte

$$Z\cdot\partial z_y + Y\cdot\partial y_x + X = 0$$

ist, während man hier

$$Z = 1, \qquad Y = -ax + C \quad \text{und} \quad X = 0$$

hat, und da diese Werthe von Z, Y, X der Gleichung

$$Z\cdot(\partial Y_x - \partial X_y) + Y\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0,$$

welche dort als die Bedingung der Existenz eines sie integrirenden Faktors ξ gefunden worden ist, nicht genügt; so konnte man daraus bequemer folgern, daß für sie kein integrirender Faktor ξ_1 existirt.

chung (C.) wie dort, nur hier ξ_1 statt des dortigen z_1 geschrieben; aber noch jedesmal eine zweite Gleichung (B'.) und (C'.) dazu, welche beziehlich aus (B.) und (C.) hervorgeht, wenn man statt der Ableitungen nach y jetzt Ableitungen nach z, und in den Gleichungen $c+d+b = n-1$ oder $c+f+b = n-1$ jetzt m statt n setzt.

Was aber zum Nachtheil dieses Verfahrens dort schon gesagt werden mußte, ist hier in noch höherem Maaße zu wiederholen, weshalb wir uns hier mit dieser kurzen Andeutung begnügen. (Vgl. La-croix Traité. T. II. Paris 1814. pag. 525.).

§. 399.

I. Kann man von zwei solchen totalen Differenzialgleichungen

$$1)\quad V = 0 \qquad \text{und} \qquad 2)\quad V' = 0,$$

zu zwei allgemeinen ersten Integralen

$$3)\quad U = 0 \qquad \text{und} \qquad 4)\quad U' = 0$$

gelangen; kann man dann von jeder dieser beiden Gleichungen (3. und 4.), oder von jeder von zwei andern Gleichungen, welche aus (3. und 4.) durch algebraische Verbindung hervorgegangen sind, wieder zu neuen solchen allgemeinen ersten Integralen gelangen; — und kommt man zuletzt auf diesem Wege zu zwei Urgleichungen: so liefern diese letztern durch algebraische Auflösung nach y und nach z genau dieselben Funktionen von x, mit genau eben so vielen willkührlichen Konstanten, welche man auch erhalten wird, wenn man die beiden Gleichungen $V = 0$ und $V' = 0$ nach der Anleitung des (§. 281. d. V. Th. d. S.) dadurch allgemein integrirt, daß man zuerst z und alle Ableitungen von z eliminirt, nachgehends die entstehende Differenzialgleichung zwischen nur zwei Veränderlichen x und y integrirt, zuletzt aber z auf algebraischem Wege dazu findet.

II. Auch ist es schon vortheilhaft, wenn man auf diesem Wege von den Gleichungen $V = 0$ und $V' = 0$ zu neuen solchen Gleichungen $W = 0$, $W' = 0$ gelangen kann, welche zwar noch nicht Urgleichungen, aber welche doch von einer nie-

drigern Ordnung sind, so daß das Verfahren des (§. 281. d. V. Th. d. S.) nun bequemer angewandt werden kann.

Beispiel. Hat man die beiden Gleichungen

1) $y \cdot \partial^2 z_x - z \cdot \partial^2 y_x = a$ und 2) $\partial y_x \cdot \partial^2 y_x + \partial z_x \cdot \partial^2 z_x = X_x$,

so erhält man sogleich die beiden Integralgleichungen

3) $y \cdot \partial z_x - z \cdot \partial y_x = ax + b$ und 4) $\frac{1}{2} \partial y_x^2 + \frac{1}{2} \partial z_x^2 = \int X \cdot dx + c$,

wo b und c zwei willkührliche Konstanten vorstellen, während die Konstante c, als in dem Integral $\int X \cdot dx$ bereits enthalten, angesehen und deshalb weggelassen werden kann.

Diese Gleichungen (3. und 4.) sind nun nur noch, in Bezug auf die Ableitungen von y und z, von der ersten Ordnung, und man braucht daher nun jede dieser beiden neuen Gleichungen nur noch einmal zu differenziiren, um das Eliminiren nach dem (§. 281. d. V. Th. d. S.) statt finden lassen zu können.

Anmerkg. Wir haben im (§. 398. V.) bereits gesehen, daß wenn V eine Funktion von $x, y, y_1, \cdots y_n, z, z_1, \cdots z_m$ ist, während $y_1, \cdots y_n, z_1, \cdots z_m$ Ableitungen von y und z nach x vorstellen, — daß man dann, wenn $n \gtrless m$ vorausgesetzt wird, von der Gleichung

$$V = 0,$$

so nach und nach zu einer Gleichung

$$W = 0$$

geführt werden könne, welche bloß noch die Ableitungen von y bis zu y_{n-m} hin, und gar keine Ableitungen von z mehr enthält, welche dagegen m willkührliche Konstanten in sich aufgenommen hat, sobald nur alle dazu nöthigen Bedingungen erfüllt sind. — Diese Gleichung $W = 0$, wenn sie nach z algebraisch aufgelößt wird, liefert also z als Funktion von

$$x, y, y_1, \cdots y_{n-m},$$

so daß, wenn solche statt z, ihre Ableitungen nach allem x, d. h.

$$\partial z_{(x)}, \partial^2 z_{(x)}, \cdots \partial^m z_{(x)} \text{ statt } z_1, z_2, \cdots z_m$$

substituirt wird, die Gleichung $V = 0$ identisch werden muß, während y noch jede unbestimmte Funktion von x bleibt.

Ist dann $n = m$, so ist $W = 0$ bloß eine Urgleichung, und liefert z bloß in y und x ausgedrückt, ohne noch Ableitungen von y aufzunehmen.

Wir wollen nun versuchen, ob sich nicht dieses mte Integral $W = 0$ der gegebenen Differenzialgleichung $V = 0$ sogleich direkt finden lassen werde, ohne nach der (Nro. V. des §. 398.) verfahren und alle ersten, zweiten, ꝛc. ꝛc. (m—1)sten (Zwischen-) Integrale auffinden zu müssen. Daher folgende

§. 400. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung

$$1) \qquad V_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_n,z,z_1,z_2,\cdots z_m} = 0,$$

wo $y_1, y_2, \cdots y_n, z_1, z_2, \cdots z_m$ die Ableitungen vorstellen, beziehlich von y und von z nach x genommen, und wo $n \gtrless m$ seyn soll. — Es wird die Funktion

$$2) \qquad Z = Z_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-m}}$$

gesucht, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn man sie statt z, ihre Ableitungen nach allem x aber statt $z_1, z_2, \cdots z_m$ in $V = 0$ substituirt, letztere Gleichung identisch wird, ohne eine Relation zwischen y und x zu bestimmen, so daß y jede beliebige unbestimmte Funktion von x seyn und bleiben kann.

Auflösung.

I. Man denke sich unter z bereits die gesuchte Funktion, so erhält man, wenn man solche fortgesetzt nach allem x differenziirt,

$$\partial z = \partial z_{(x)} = \partial z_x + \partial z_y \cdot y_1 + \partial z_{y_1} \cdot y_2 + \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot y_{n-m+1};$$

$$\partial^2 z = \partial^2 z_{(x)} = \partial^2 z_x + 2 \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot y_1 + \cdots\cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot y_{n-m+2};$$

$$\partial^3 z = \cdots$$

u. s. f.; bis zuletzt auch $\partial^m z$ oder $\partial^m z_{(x)}$ auf eine ähnliche Weise in Parzial-Ableitungen der gesuchten Funktion $z_{x,y,y,\cdots y_{n-m}}$ ausgedrückt seyn wird.

II. Man setze diese Ausdrücke beziehlich statt $z_1, z_2, z_3, \cdots z_m$ in die gegebene Gleichung $V = 0$. Da nun solche dadurch identisch werden muß, so müssen, in so ferne die gesuchte Funktion z und ihre Parzial-Ableitungen nicht y_{n-m+1} und auch keine höhere Ableitungen von y enthalten können, aus der entstehenden Gleichung diese eben genannten Ableitungen $y_{n-m+1}, y_{n-m+2} \cdots y_{n-1}, y_n$ von selbst herausfallen.

III. Dadurch erhält man aber eine oder mehrere Parzialgleichungen, welche zur Bestimmung von z dienen, und nach den (§. §. 296—300 und 323—326. des V. Th. d. S.) weiter behandelt werden müssen. Bei dieser letzterwähnten Behandlung wird man zugleich zu den Bedingungsgleichungen der Integrabilität geführt werden.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Gleichung

1) $$V = (x+z\cdot z_1)\cdot y_2 - z\cdot y_1\cdot z_2 - y_1\cdot(1+y_1^2+z_1^2) = 0,$$

so ist hier $m = n = 2$, also kann z bloß eine Funktion von x und y allein seyn, ohne y_1 oder y_2 zu enthalten. Man hat daher

2) $$\partial z = \partial z_x + \partial z_y\cdot y_1;$$

3) $$\partial^2 z = \partial^2 z_x + 2\cdot\partial^{1,1} z_{x,y}\cdot y_1 + \partial^2 z_y\cdot y_1^2 + \partial z_y\cdot y_2.$$

Setzt man nun diese Werthe zur Rechten für ∂z und $\partial^2 z$ statt z_1 und z_2 in die gegebene Gleichung $V = 0$, so erhält man

4) $$(x+z\cdot\partial z_x)\cdot y_2 - (1+\partial z_y^2+z\cdot\partial^2 z_y)\cdot y_1^3 - 2(z\cdot\partial^{1,1} z_{x,y}+\partial z_x\cdot\partial z_y)\cdot y_1^2 - (1+\partial z_x^2+z\cdot\partial^2 z_x)\cdot y_1 = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt nun, weil in ihr weder y_2 noch y_1 vorkommen darf, in die 4 Gleichungen

5) $$\left\{\begin{array}{r} x+z\cdot\partial z_x = 0; \\ 1+\partial z_y^2+z\cdot\partial^2 z_y = 0; \\ \partial z_x\cdot\partial z_y+z\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} = 0; \\ 1+\partial z_x^2+z\cdot\partial^2 z_x = 0. \end{array}\right\}$$

Von diesen 4 Gleichungen ist die dritte die Ableitung der ersten nach allem y, die vierte dagegen ebenfalls die Ableitung der ersten nach allem x. Also bleiben zur Bestimmung von z die beiden Gleichungen

6) $x+z\cdot\partial z_x = 0$ und 7) $1+\partial z_y^2+z\cdot\partial^2 z_y = 0.$

Integrirt man hiervon die (6.), so erhält man

8) $$\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}z^2 = C_y,$$

so daß noch C_y durch die (7.) zu bestimmen bleibt. Differenziirt man diese letztere Gleichung (8.) zweimal hinter einander nach allem y, so erhält man

9) $z\cdot\partial z_y = \partial C_y$ und 10) $\partial z_y^2+z\cdot\partial^2 z_y = \partial^2 C_y.$

Die hieraus gezogenen Werthe von ∂z_y und $\partial^2 z_y$ in die Differenzialgleichung (7.) substituirt, geben nun

11) $1+\partial^2 C_y = 0$ d. h. $\partial^2 C_y = -1$, also $\partial C_y = -y+a$

und

12) $$C_y = -\tfrac{1}{2}y^2+ay+b;$$

so daß das obige Integral in

13) $$x^2+y^2+z^2 = 2a\cdot y+2b$$

übergeht.

§. 401.

Ist die gegebene Differenzialgleichung in Bezug auf die Ableitungen von z nur von der ersten Ordnung, so wird

$$z = z_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-1}}$$

gesucht, also bloß

$$z_1 = \partial z_x+\partial z_y\cdot y_1+\partial z_{y_1}\cdot y_2+\cdots+\partial z_{y_{n-1}}\cdot y_n$$

gesetzt; und die gegebene Differenzialgleichung zerfällt dann in Partialgleichungen, welche bloß die ersten Ableitungen $\partial z_x, \partial z_y, \partial z_{y_1}, \cdots$ allein enthalten, also nach (§§. 296—300. d. V. Th. d. S.) unmittelbar weiter behandelt werden können und müssen.

§. 402.

Ist namentlich die gegebene Differenzialgleichung von folgender Form:

1) $$X+Y\cdot y_1+Z\cdot z_1 = 0,$$

wo X, Y, Z gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen x, y und z sind, so erhält man, indem

2) $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$ statt z_1

gesetzt wird, sogleich die beiden Gleichungen

3) $X + Z \cdot \partial z_x = 0$ und 4) $Y + Z \cdot \partial z_y = 0$,

und diese beiden Parzial-Gleichungen (3. und 4.) müssen nun nach (§. 296. d. V. Th. d. S.) integrirt werden.

Differenziirt man aber die Gleichung (3.) nach allem y, so wie die (4.) nach allem x, so erhält man

5) $\partial X_y + \partial Z_y \cdot \partial z_x + Z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = 0$;

6) $\partial Y_x + \partial Z_x \cdot \partial z_y + Z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = 0$;

und eliminirt man zuletzt aus diesen 4 Gleichungen die 3 Ableitungen ∂z_x, ∂z_y und $\partial^{1,1} z_{x,y}$, so erhält man die Gleichung

$(\odot)\cdots \quad X \cdot (\partial Y_z - \partial Z_y) + Y \cdot (\partial Z_x - \partial X_z) + Z \cdot (\partial X_y - \partial Y_x) = 0$

zwischen x, y und z, welche im allgemeinen als die Bedingungsgleichung der Integrabilität der gegebenen Gleichung angesehen werden muß. *)

Beispiel 1. Ist z. B. zu integriren die Gleichung

1) $(ay - bz) + (cz - ax) \cdot y_1 + (bx - cy) \cdot z_1 = 0$,

---

*) Gewöhnlich giebt man dieser Gleichung $X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1 = 0$, indem man durch Z wegdividirt, und $-p$ statt $\frac{X}{Z}$, so wie $-q$ statt $\frac{Y}{Z}$ schreibt. Diese andere Form

$$z_1 - p - q \cdot y_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \partial z_x - p - q \cdot \partial y_x = 0$$

oder

$$\partial z - p \cdot \partial x - q \cdot \partial y = 0,$$

indem man im letztern Fall x selber wieder als Funktion eines neuen Veränderlichen und alle bloßen ∂ nach letzterem genommen sich denkt. — Die Bedingungsgleichung der Integrabilität $(\odot)$ nimmt dann die Form an

$$p \cdot \partial q_z - q \cdot \partial p_z + \partial q_x - \partial p_y = 0,$$

und die Gleichungen (3. und 4.) nehmen dann die Form

$$\partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q$$

an.

so findet man, wenn $\partial z_x + \partial z_y \cdot \partial y_x$ statt z_1 gesetzt wird, die Gleichungen

2) $(ay - bz) + (bx - cy) \cdot \partial z_x = 0$ und 3) $(cz - ax) + (bx - cy) \cdot \partial z_y = 0$,

welche nun nach (§. 296. d. V. Th. d. S.) integrirt werden müssen. Giebt man der (2.) diese Form

$$4) \qquad \frac{1}{bx - cy} + \frac{\partial z_x}{ay - bz} = 0,$$

und integrirt man dann, so erhält man, weil y konstant ist,

$$5) \qquad \frac{1}{b} \cdot log\,(bx - cy) - \frac{1}{b} \cdot log\,(ay - bz) = \frac{1}{b} \cdot log\, Y_y$$

d. h.

$$6) \qquad \frac{bx - cy}{ay - bz} = Y_y \quad \text{oder} \quad bx - cy = Y \cdot (ay - bz),$$

so daß also nur noch Y so bestimmt werden darf, daß dieses Integral (6.) auch noch der Gleichung (3.) genügt. Differenzirt man aber diese Gleichung (6.) nach allem y, so ergiebt sich

$$7) \qquad -c = \partial Y_y \cdot (ay - bz) + Y \cdot (a - b \cdot \partial z_y).$$

Setzt man nun die aus (6. 7.) zu ziehenden Werthe für z und ∂z_y in die (3.), d. h. eliminirt man nun (immer nach Anleitung des §. 296. d. V. Th. d. S.) aus (6. 7. und 3.) sowohl z als auch ∂z_y, so erhält man

$$8) \qquad \partial Y_y = 0 \quad \text{d. h.} \quad Y = C;$$

so daß also das gesuchte Integral (6.) in

$$9) \qquad bx - cy = C \cdot (ay - bz)$$

oder

$$10) \qquad bx - (c + Ca) \cdot y + Cb \cdot z = 0$$

übergeht.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$1) \quad (y^2 + yz + z^2) + (x^2 + xz + z^2) \cdot y_1 + (x^2 + xy + y^2) \cdot z_1 = 0,$$

so wird man den beiden Gleichungen

$$2) \qquad (y^2 + yz + z^2) + (x^2 + xy + y^2) \cdot \partial z_x = 0$$

und

$$3) \qquad (x^2 + xz + z^2) + (x^2 + xy + y^2) \cdot \partial z_y = 0$$

zu genügen haben. Schreibt man die (2.) so:

4) $$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{\partial z_x}{y^2+yz+z^2}=0,$$

und integrirt man nun in so ferne y konstant ist, so erhält man

$$\frac{2}{y\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{Tg}\,\frac{x\cdot\sqrt{3}}{2y+x}+\frac{1}{Tg}\,\frac{z\cdot\sqrt{3}}{2y+z}\right)=C_y,$$

oder, wenn man die beiden Bogen in einen vereinigt,

5) $$\frac{2}{y\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{(xy+yz+xz)\cdot\sqrt{3}}{2y^2+xy+yz-xz}=C_y,$$

oder, wenn man den Faktor $\frac{2}{y\cdot\sqrt{3}}$ d. h. $\frac{y\cdot\sqrt{3}}{2}$ in die Konstante C_y mit aufgenommen sich denkt, und deren durch $\sqrt{3}$ dividirte Tangente durch Y bezeichnet,

6) $$\frac{xy+yz+xz}{2y^2+xy+yz-xz}=Y$$

oder $$xy+yz+xz=Y\cdot(2y^2+xy+yz-xz),$$

welches Integral jedoch auch noch der (3.) zu genügen hat. Differenziirt man nun diese Gleichung nach allem y, so erhält man

7) $$x+z+y\cdot\partial z_y+x\cdot\partial z_y=Y\cdot(4y+x+z+y\cdot\partial z_y-x\cdot\partial z_y)+\partial Y_y\cdot(2y^2+xy+yz-xz).$$

Eliminirt man dann aus den Gleichungen (6. 7. und 4.) sowohl z als auch ∂z_y, so erhält man

8) $$y\cdot\partial Y_y+Y\cdot(1+Y)=0$$

oder

9) $$\frac{\partial Y_y}{Y(1+Y)}+\frac{1}{y}=0;\quad\text{d. h.}\quad\frac{\partial Y_y}{Y}-\frac{\partial Y_y}{1+Y}+\frac{1}{y}=0;$$

also, wenn man integrirt,

$$log\,Y-log\,(1+Y)+log\,y=log\,C$$

d. h.

10) $$\frac{y\cdot Y}{1+Y}=C,$$

wo C eine willkührliche (nach x, nach y und nach z) Konstante ist. Eliminirt man zuletzt Y aus (10. und 6.), so erhält man zum gesuchten Integral, wenn man noch C statt 2C schreibt,

11) $$xy+xz+yz=C\cdot(x+y+z).$$

Beispiel 3. Nehmen wir noch das Beispiel

1) $(x^2-y^2+z^2)\cdot\partial x-z^2\cdot\partial y+\left[z(y-x)+\frac{x}{z}(y^2-x^2)\right]\cdot\partial z=0,$

wo die Ableitungen ∂x, ∂y, ∂z nach einem beliebigen Veränderlichen genommen gedacht sind.

Man thut hier besser statt z als Funktion von x und y anzusehen, lieber x als Funktion von y und z sich zu denken, so daß

2) $$\partial x=\partial x_y\cdot\partial y+\partial x_z\cdot\partial z$$

statt ∂x in die (1.) substituirt, und dadurch die (1.), wegen der Willkührlichkeit von ∂x oder ∂z, in die beiden:

3) $$(x^2-y^2+z^2)\cdot\partial x_y-z^2=0$$

und

4) $$z\cdot(x^2-y^2+z^2)\cdot\partial x_z+[z^2\cdot(y-x)+x\cdot(y^2-x^2)]=0$$

zerlegt wird. — Die Gleichung (3.) gehört (in so ferne in ihr z konstant ist) zur Riccati'schen Gleichung (§. 354. III.); weil ihr aber $y=x$ genügt, so führt man, um ihr allgemeines Integral zu finden, einen neuen Veränderlichen t so ein, daß

5) $$y=x+\frac{z^2}{t}$$

wird. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende:

6) $$\partial t_x-\frac{2x}{z^2}\cdot t=1$$

über, welche lineär und von der ersten Ordnung ist, welche daher — nach (§. 349.) integrirt, und wenn man statt t wieder seinen Werth setzt — das Integral der (3), nämlich

7) $$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx=\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot z^2}{y-x}+Z_z$$

liefert, wo das angezeigte Integral nur auf das explizite x geht, so daß z als konstant angesehen werden muß, wo endlich Z_z die willkührliche Konstante vorstellt.

Differenziirt man nun diese Gleichung nach allem z (indem man y als konstant ansieht), so erhält man *)

---

*) Wird das obige $\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx$ durch $P_{x,z}$ bezeichnet, so hat man

$$\partial P_{(z)}=\partial P_z+\partial P_x\cdot\partial x_z,$$

dabei aber ist nach (§. 221. d. V. Th. d. S.)

$$8)\quad e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot\partial x_z+\frac{2}{z^3}\cdot\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot x^2\cdot dx=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot\left(\frac{2z}{y-x}+\frac{z^2}{(y-x)^2}+\frac{2x^2-2xz\cdot\partial x_z}{z(y-x)}\right)+\partial Z_z.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (4. 7. und 8.) sowohl x als auch ∂x_z; so erhält man

$$9)\qquad Z-z\cdot\partial Z_z=0\ *)\quad\text{oder}\quad\frac{1}{z}-\frac{\partial Z_z}{Z}=0,$$

und diese giebt, integrirt,

$$10)\qquad Z=C\cdot z.$$

Wird nun hieraus und aus (7.) Z selbst eliminirt, so erhält man als gesuchtes allgemeines Integral der gegebenen Differenzialgleichung (1.) das folgende, nämlich

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx=\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot z^2}{y-x}+C\cdot z,$$

wo C die willkührliche Konstante ist, und wo man nicht vergessen muß, daß in dem Integral

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx$$

nur nach dem expliziten x integrirt werden soll, also daß dabei z konstant angesehen wird. Man kann dies dadurch ausdrücken, daß man

$$\left[\left(\int e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\cdot dx\right)_\alpha\right]_z$$

dafür schreibt.

$$\partial Pz=\int\partial\left(e^{-\frac{x^2}{z^2}}\right)_z\cdot dx=\int\frac{2x}{z^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx=\frac{2}{z^3}\cdot\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot x^2\cdot dx;$$

und $$\partial P_x=e^{-\frac{x^2}{z^2}}.$$

*) Um diese Elimination möglich zu machen, muß man vorher das in der Gleichung (8.) vorkommende 2te, bloß angezeigte Integral theilweise integriren, d.h. die Formel (§. 225. d. V. Th. d. S.) anwenden, so daß man erhält

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot x^2\cdot dx=-\tfrac{1}{2}z^2\cdot e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot x+\tfrac{1}{2}z^2\cdot\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\cdot dx.$$

§. 403.

Um die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der gegebenen Gleichung $V = 0$ sogleich in ihrer größten Allgemeinheit zu erhalten, hat Lagrange bei der Aufgabe des (§. 400.) wiederum ein, den Auflösungen der (§. 339. §. 392.) analoges Verfahren eintreten lassen, welches jedoch den von ihm beabsichtigten Zweck nicht zu erreichen scheint, und welches wir daher hier nur in der Kürze anführen wollen.

Es ist nämlich dieses Verfahren ohngefähr folgendes:

I. Nach der Voraussetzung soll selbst dann noch $V = 0$ identisch seyn, wenn auch eine neue Funktion

3) y_x oder $y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 y + \cdots$ statt y,

statt z aber das gesetzt wird, was aus der gesuchten Funktion $z_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-m}}$ dadurch wird, daß y in y_x, und natürlich dann auch ∂y_x oder y_1 in $\partial(y_x)_x$, u. s. w. f. übergeht, und was (nach dem XI. Kap. d. V. Th. d. S.) durch

4) z_x oder $z + x \cdot \delta z + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 z + \cdots$

bezeichnet wird; während dann auch statt ∂z_x oder z_1 jetzt $\partial(z_x)_x$, u. s. w. zu substituiren ist. Dabei sind δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. als ganz beliebige Funktionen von x gedacht, während δz, $\delta^2 z$, ꝛc. von diesen δy, $\delta^2 y$, ꝛc. abhängig seyn werden, so zwar, daß man nach dem (XI. Kap. d. V. Th. d. S.)

5) $\delta z = \partial z_y \cdot \delta y + \partial z_{y_1} \cdot \partial \delta y + \partial z_{y_2} \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot \partial^{n-m} \delta y,$

und auf ähnliche Weise auch $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, ꝛc. ꝛc. in δy, $\delta^2 y$, ꝛc. ꝛc. und in die Parzial-Ableitungen der gesuchten Funktion $z_{x,y,y_1,y_2 \cdots y_{n-m}}$ ausgedrückt hat.

II. So wie aber diese Werthe aus (3. und 4.) in die Gleichung $V = 0$ gesetzt werden, so nimmt sie die Form

6) $V_{(x)} = 0$ oder $V + x \cdot \delta V + \frac{x^2}{2!} \cdot \delta^2 V + \cdots = 0$

an, so daß dann einzeln wird

7) $\delta V = 0;\quad \delta^2 V = 0;\quad \delta^3 V = 0;$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.;

während (nach dem XI. Kap. d. V. Th. d. S.)

8) $$\left.\begin{aligned}\delta V = {} & \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial \delta y + \cdots + \partial V_{y_n} \cdot \partial^n \delta y \\ & + \partial V_z \cdot \delta z + \partial V_{z_1} \cdot \partial \delta_z + \cdots + \partial V_{z_m} \cdot \partial^m \delta z\end{aligned}\right\}',$$

und auf ähnliche Weise auch $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, ꝛc. ꝛc. gefunden wird.

III. Setzt man nun hier herein und zwar zunächst in die Gleichung (8.) statt δz seinen Werth aus (5.), statt $\partial \delta z$, $\partial^2 \delta z$, ... $\partial^m \delta z$ aber das, was dieser Ausdruck zur Rechten in (5.) liefert, wenn man ihn hinter einander nach allem x differenziirt *); substituirt man ferner diese so gefundenen Ausdrücke für δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, ꝛc. ꝛc. in die Gleichungen (6.): so werden in der erstern der Gleichungen (6.) bloß noch δy und Ableitungen von δy vorkommen, und man wird sie auf die Form

9) $$M_0 \cdot \delta y + M_1 \cdot \partial \delta_y + M_2 \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + M_n \cdot \partial^n \delta y = 0$$

bringen können, wo die Koeffizienten M_0, M_1, M_2, ... M_n Funktionen seyn werden von x, y, y_1, $y_2 \cdots y_n$, z, z_1, z_2, ... z_m, in denen aber die Ableitungen ∂z_y, ∂z_{y_1}, ∂z_{y_2}, ... $\partial z_{y_{n-m}}$ der gesuchten Funktion $z_{x,y,y_1,y_2,\cdots y_{n-m}}$ selbst noch vorkommen.

IV. Aus dieser Gleichung (9.) folgen nun, wegen der Willkührlichkeit von δy, die einzelnen $n+1$ Gleichungen

10) $M_0 = 0;\ M_1 = 0;\ M_2 = 0;\ M_3 = 0;\ \cdots\ M_n = 0;$

---

*) Man erhält dadurch

$$\partial \delta z = \partial(\partial z_y) \cdot \delta y + [\partial z_y + \partial(\partial z_y)] \cdot \partial \delta y + [\partial z_{y_1} + \partial(\partial z_y)] \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot \partial^{n-m+1} \delta y;$$

$$\partial^2 \delta z = \partial^2(\partial z_y) \cdot \delta y + [2\partial(\partial z_y) + \partial^2(\partial z_{y_1})] \cdot \partial \delta y + [\partial z_y + 2\partial(\partial z_{y_1}) + \partial^2(\partial z_{y_2})] \cdot \partial^2 \delta y + \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot \partial^{n-m+2} \delta y;$$

$$\partial^3 \delta z = \partial^3(\partial z_y) \cdot \delta y + \cdots \quad \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot \partial^{n-m+3} \delta y;$$

endlich

$$\partial^n \delta z = \partial^n(\partial z_y) \cdot \delta y + \cdots \quad \cdots + \partial z_{y_{n-m}} \cdot \partial^n \delta y.$$

und aus diesen Gleichnngen will nun Lagrange die darin enthaltenen Ableitungen ∂z_y, ꝛc. ꝛc, eliminirt wissen, wenn man die Bedingungsgleichungen der Integrabilität zu Tage gefördert sehen will.

A. Die Anwendung dieses Verfahrens auf den einfachsten Fall, wo

$$V = X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1 = 0$$

gegeben ist, während X, Y und Z gegebene Funktionen von x, y und z sind, führt zu den beiden Gleichungen

$$M_0 = 0 \quad \text{und} \quad M_1 = 0,$$

welche jetzt die nachstehenden werden, nämlich

$$\text{I. } \partial Z_y \cdot z_1 + \partial Y_y \cdot y_1 + \partial X_y + (\partial Z_z \cdot z_1 + \partial Y_z \cdot y_1 + \partial X_z) \cdot \partial z_y + Z \cdot \partial(\partial z_y) = 0;$$

und

$$\text{II. } Y + Z \cdot \partial z_y = 0.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen die Ableitung ∂z_y [zu welchem Ende die Gleichung (II.) noch nach allem explizit und implizit (in y, z und ∂z_y) vorkommenden x differenziirt, und dann aus dieser dadurch entstehenden Gleichung

$$\text{III. } \partial Y_x + \partial Y_y \cdot y_1 + \partial Y_z \cdot z_1 + (\partial Z_x + \partial Z_y \cdot y_1 + \partial Z_z \cdot z_1) \cdot \partial z_y + Z \cdot \partial(\partial z_y) = 0$$

und den Gleichungen (I. und II.) sowohl ∂z_y als auch $\partial(\partial z_y)$ eliminirt werden muß], so erhält man wiederum, wenn man nur noch mittelst der Gleichung $V = 0$ selbst, auch z_1 eliminirt, die im vorhergehenden (§. 402.) schon erhaltene Bedingungsgleichung (⊙) der Integrabilität.

Ist nun diese Bedingungsgleichung der Integrabilität erfüllt, so giebt eine der beiden Gleichungen (I.) oder (II.), und hier namentlich die Gleichung (II.), sogleich z selbst als Funktion von y, in welcher x als Konstant gedacht ist, mit einer willkührlichen Konstante X_x noch dazu. Weil aber dieser Werth von z der Gleichung $V = 0$ zu genügen hat, so folgt, daß, wenn man ihn statt z, seine Ableitung nach allem x aber statt z_1 in $V = 0$

substituirt, man die Gleichung zur Bestimmung der Funktion X_x haben werde, welche bei der Integration der (II.) als willkührliche Konstante eingegangen ist.

B. Wendet man aber dasselbe Verfahren auf diesen andern Fall an, wo

$$V = P + Q \cdot y_2 + R \cdot z_2$$

ist, während P, Q, R Funktionen von x, y, z, y_1 und z_1 vorstellen sollen, so erhält man statt der 3 Gleichungen

$$M_0 = 0; \quad M_1 = 0 \quad \text{und} \quad M_2 = 0;$$

jetzt diese 3 Gleichungen, nämlich

$$\text{I.} \quad \left\{\begin{array}{l}(\partial P_y + \partial Q_y \cdot y_2 + \partial R_y \cdot z_2) + (\partial P_z + \partial Q_z \cdot y_1 + \partial R_z \cdot z_1) \cdot \partial z_y \\ + (\partial P_{z_1} + \partial Q_{z_1} \cdot y_2 + \partial R_{z_1} \cdot z_2) \cdot \partial(\partial z_y) + R \cdot \partial^2(\partial z_y)\end{array}\right\} = 0;$$

$$\text{II.} \quad (\partial P_{y_1} + \partial Q_{y_1} \cdot y_2 + \partial R_{y_1} \cdot z_2) + (\partial P_{z_1} + \partial Q_{z_1} \cdot y_2 + \partial R_{z_1} \cdot z_2) \cdot \partial z_y + 2R \cdot \partial(\partial z_y) = 0;$$

$$\text{III.} \quad Q + R \cdot \partial z_y = 0.$$

Differenziirt man hier die Gleichung (III.) zweimal hinter einander nach allem x, so erhält man

$$\text{IV.} \quad \partial Q + \partial R \cdot \partial z_y + R \cdot \partial(\partial z_y) = 0$$

$$\text{V.} \quad \partial^2 Q + \partial^2 R \cdot \partial z_y + 2\partial R \cdot \partial(\partial z_y) + R \cdot \partial^2(\partial z_y) = 0.$$

Und eliminirt man nun aus diesen 5 Gleichungen die Ausdrücke ∂z_y, $\partial(\partial z_y)$, $\partial^2(\partial z_y)$; so ergeben sich 2 Gleichungen, welche als Bedingungsgleichungen der Integrabilität angesehen werden müssen.

Hier finden sich aber folgende Umstände zu bedenken:

1) Weil P, Q, R Funktionen von x, y, z, y_1 und z_1 sind, so werden die Ableitungen ∂Q, ∂R, $\partial^2 Q$, $\partial^2 R$, welche nach allem x genommen worden sind, die Ableitungen y_2 und z_2, aber auch noch y_3 und z_3 in sich aufnehmen.

2) Man kann nun zwar z_2 und z_3 mittelst der Gleichungen $V = 0$ und $\partial V = 0$ leicht wieder wegschaffen; aber z und z_1 werden nichts destoweniger in den Gleichungen (I.—V.) und daher auch in den beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität noch bleiben. — Es entstehen daher nun die Fragen:

a) Müssen diese beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität dergestallt erfüllt seyn, daß in ihnen auch die z und z_1 von selbst wegfallen? — und wenn dies wäre, was machte man dann mit der Gleichung (III.), welche z selbst zu liefern hat; da in ihr (nämlich in R und in Q) auch noch z_1 (d. h. ∂z oder $\partial z_{(x)}$ d. h. $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$) vorkommen wird? —

b) Oder muß man statt z_1 seinen Werth $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$ überall substituiren, wo z_1 vorkommt? — Dann müßte man aber, weil nun die unbekannte Ableitung ∂z_y selbst wieder einginge, diese Substitution sogleich in jeder der Gleichungen (I.—V.) statt finden lassen, nachdem aus ihnen z_2 und z_3 mittelst der Gleichungen $V = 0$ und $\partial V = 0$ eliminirt worden sind, und dann erst, nicht bloß ∂z_y, sondern auch ∂z_x eliminiren. — Dann aber würde man nur zu einer einzigen Bedingungsgleichung der Integrabilität gelangen, welche jedoch, wegen der Willkührlichkeit von y, y_1, y_2, 2c., wieder in 2 oder mehre Gleichungen zerfallen könnte.

c) Oder muß man die Gleichung $V = 0$ erst einmal, etwa nach (§. 398. III.) integriren, um dann aus ihrem Integral $U_{x,y,z,y_1,z_1} = 0$, z_1 (in x, y, z und y_1 ausgedrückt) finden, und aus den Gleichungen (I.—V.) so eliminiren zu können, wie schon z_2 und z_3 mittelst der Gleichungen $V = 0$, $\partial V = 0$ eliminirt worden sind? — —

Man kann, will man noch etwas näher in diese Untersuchung eingehen, als es hier beabsichtigt worden ist, noch das speziellere Beispiel betrachten, wo

$$P = -y_1 \cdot (1 + y_1^2 + z_1^2); \quad Q = x + z \cdot z_1 \quad \text{und} \quad R = -z \cdot y_1$$

gegeben ist. — Die Gleichung $V = 0$ hat aber in diesem Falle zum gesuchten 2ten allgemeinen Integral, wie wir (§. 400. III.) bereits gesehen haben, das nachstehende, nämlich:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ay + b,$$

wo a und b die beiden hinzugetretenen willkührlichen Konstanten sind. — Zu demselben Resultat wird aber auch die hiesige Gleichung (III.) führen, nämlich die Gleichung

$$x + z \cdot z_1 - z \cdot y_1 \cdot \partial z_y = 0,$$

wenn man hier statt z_1 den Werth $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$ setzt, weil sie dadurch sogleich in die folgende:

$$x + z \cdot \partial z_x = 0$$

übergeht, und integrirt

$$x^2 + z^2 = C_y$$

liefert.

§. 404. Zusatz.

I. Findet man auf dem Wege der (§. §. 400.—403.), für die im (§. 400.) gegebene Gleichung $V = 0$, ein mtes Integral mit m willkührlichen Konstanten, so ist es nothwendig dasselbe, was man auch auf dem Wege des (§. 398.) erhalten haben würde, und man hat dann wiederum das allgemeine mte Integral von $V = 0$.

So ist in dem Beispiel zu (§. 400. III.) das allgemeine zweite Integral der gegebenen Differenzialgleichung gefunden worden mit den beiden willkührlichen Konstanten.

II. Findet sich aber auf diesen Wegen der (§. 400.—§. 403.) zwar eine Gleichung zwischen x, y, y_1, ··· y_{n-m} und z (ohne Ableitungen z_1, z_2, ꝛc. zu enthalten) jedoch mit weniger als m willkührlichen Konstanten, so hat man auf diesem Wege der (§. §. 400—403.), eigenthümliche besondere Auflösungen der Aufgabe, welche nicht in dem allgemeinen Integral stecken (für keine speziellen Werthe der Konstanten); in so ferne letzteres dann in der Regel gar nicht existirt.

Beispiel 1. Ist z. B. gegeben die Differenzialgleichung

1) $$\frac{x}{(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3(z^2-x^2)^{\frac{2}{3}}}{2(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot y_1 - z_1 = 0,$$

und setzt man hier statt z_1 den Werth $\partial z_x + \partial z_y \cdot y_1$, wie solches der (§. 400.) haben will, so erhält mun die beiden Gleichungen

2) $$\frac{x}{(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}} - \partial z_x = 0 \quad \text{und} \quad 3) \quad \frac{3(z^2-x^2)^{\frac{2}{3}}}{2(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}} - \partial z_y = 0.$$

Integrirt man die (2.), wo y als Konstant angesehen werden muß, so erhält man

4) $$(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}} - z = C_y.$$

Wird nun dieser Werth von z, so wie der aus ihm hervorgehende Werth von ∂z_y in die (3.) substituirt, so findet sich eine Gleichung zur Bestimmung von C_y, aus welcher jedoch x selbst nicht herausfällt. Dieser Widerspruch zeigt aber an, daß ein allgemeines Integral dieser Gleichung (1.) nicht existirt. — Obgleich aber aus dieser letzterwähnten Gleichung, x nicht von selbst herausfällt, so findet man doch bald, daß ihr der Werth $C_y = 0$, der doch auch, wie vorausgesetzt werden mußte, von x unabhängig ist, genügt. — Also findet man

$$z = (x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}$$

als einen der Gleichung (1.) genügenden Werth, und dieser ist eine der Gleichung (1.) eigenthümliche besondere Auflösung.

Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen (2. und 3.) alle Ableitungen von z dadurch, daß man die (2.) nach allem y, die (3.) dagegen nach allem x differenzirt, und dann aus allen 4 Gleichungen ∂z_x, ∂z_y und $\partial^{1,1} z_{x,y}$ eliminirt, so erhält man die Bedingungsgleichung der Integrabilität nicht identisch von der Form $0 = 0$, sondern folgende:

4) $$-x^3-4x\cdot y^3-3x\cdot z^2+3x\cdot y^2(z^2-x^2)^{\frac{1}{3}}+4xz\cdot(x^2+y^3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Diese Gleichung ist nach z vom 6ten Grade, und unter den ihr genügenden Werthen von z befindet sich auch dieser

5) $$z^2 = x^2+y^3 \quad \text{oder} \quad z = (x^2+y^3)^{\frac{1}{2}},$$

welcher sie identisch macht, d. h. welcher sie erfüllt. Und da dieser auch den beiden Gleichungen (2. und 3.) ein Genüge leistet, demnach auch der Gleichung (1.); so findet sich auch auf diesem Wege dieselbe eigenthümliche besondere Auflösung der Gleichung (1.).

Diese Auflösung liefert übrigens die einzige existirende Funktion z von x und y, welche der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügt, während unter y noch jede beliebige Funktion von x gedacht werden kann.

Diese Gleichung $z = (x^2+y^3)^{\frac{1}{2}}$ liefert auch für jede beliebig angenommene Funktion y_x statt y, augenblicklich $z = z_x$ so dazu, daß diese Funktionen y_x und z_x, statt y und z in die Gleichung (1.) substituirt, letztere identisch machen.

Setzt man aber diese bestimmte Funktion y_x statt y, so wie ihre Ableitung ∂y_x statt y_1 sogleich in die (1.), so findet sich dann durch Integration einer Differenzialgleichung bloß zwischen den beiden Veränderlichen x und z, die Funktion $z_{x,c}$ allgemeiner dazu, mit einer willkührlichen Konstante c, von welcher der zu derselben Funktion y_x

aus (5.) sich ergebende Werth von z nur ein besonderer Fall (für einen besondern Werth der Konstante) seyn wird, auch bloß ein singulärer Werth seyn kann. *)

Beispiel 2 Ist ferner gegeben die Gleichung

1) $y \cdot \partial^2 z - z \cdot \partial^2 y = a$ oder $y \cdot z_2 - z \cdot y_2 - a = 0$,

und sucht man nach (§. 400.) $z = z_{x,y}$ dazu, so hat man zunächst

2) $z_2 = \partial^2 z_x + 2 \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot y_1 + \partial^2 z_y \cdot y_1^2 + \partial z_y \cdot y_2$.

Setzt man dann diesen Werth von z_2 in die Gleichung (1.), so wird sie folgende

3) $y \cdot \partial^2 z_x - a + 2y \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot y_1 + y \cdot \partial^2 z_y \cdot y_1^2 + (y \cdot \partial z_y - z) \cdot y_2 = 0$.

Diese zerfällt aber, wegen der Willkührlichkeit von y, in folgende 4 Gleichungen

4) $y \cdot \partial^2 z_x - a = 0$; 5) $\partial^{1,1} z_{x,y} = 0$;

6) $\partial^2 z_y = 0$; 7) $y \cdot \partial z_y - z = 0$.

Die Gleichung (7.) läßt sich sogleich integriren, und giebt

8) $z = c \cdot y$.

Dieser Werth von z genügt zugleich den Gleichungen (6. und 5.), reduzirt aber die (4.) auf

9) $a = 0$.

Ist also a nicht Null gegeben, so enthält diese Gleichung einen Widerspruch, und dieser zeigt an, daß nun eine Funktion $z = z_{x,y}$, wie sie gesucht wird, gar nicht existirt.

Ist aber a wirklich der Null gleich gegeben, so enthält die Gleichung (9.) keinen Widerspruch, und die Gleichung (8.), nämlich

---

*) Man übersehe nicht, daß dieses Beispiel in der Form

$$X + Y \cdot y_1 + Z \cdot z_1 = 0$$

enthalten ist, welche wir bereits in den (§. §. 402. 403.) behandelt haben, und daß die Gleichung (4.) keine andere ist, als die dort gefundene Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$(\odot) \cdots \quad X \cdot (\partial Y_z - \partial Z_y) + Y \cdot (\partial Z_x - \partial X_z) + Z \cdot (\partial X_y - \partial Y_x) = 0,$$

die aber dasmal nicht identisch $0 = 0$ ist für jedes z, sondern z selbst, und zufällig so bestimmt, daß solche Funktion gerade der gegebenen Differenzialgleichung genügt.

$$z = c \cdot y$$

genügt also der gegebenen Differenzialgleichung (1.). — Diese Gleichung (8.) giebt daher nun die gesuchte Funktion z in y, welche der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügt, während y jede beliebige Funktion von x bleibt.

Weil aber diese Gleichung

$$z = c \cdot y$$

nur eine einzige willkührliche Konstante enthält, das allgemeine Integral dagegen zwei Konstanten enthalten müßte, so liefert solche wiederum nur eine jener eigenthümlichen besonderen Auflösungen.

In der hier gegebenen Differenzialgleichung

$$V = y \cdot \partial^2 z - z \cdot \partial^2 y - a = 0$$

genügt übrigens die Funktion V den beiden im (§. 392.) gefundenen Bedingungsgleichungen der Integrabilität. Integrirt man daher diese Gleichung (1.) direkt nach dem (§. 392.), so erhält man sogleich

$$y \cdot \partial z - z \cdot \partial y - a \cdot x + c_1 = 0$$

als ihr allgemeines erstes Integral. Allein es ist nicht möglich, diese letztere Gleichung noch einmal so allgemein zu integriren, so daß man z selbst in x und y ausgedrückt erhielte, während y jede beliebige Funktion von x bleibt; wie man sogleich sieht, wenn man auf diese Gleichung dasselbe Verfahren des (§. 400.) oder des (§. 402.), wo $Z = y$, $Y = -z$ und $X = -ax + c_1$ genommen werden muß, anwendet. Auch hier findet sich wieder statt der Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$(\odot)\cdots \quad X \cdot (\partial Y_z - \partial Z_y) + Y \cdot (\partial Z_x - \partial X_z) + Z \cdot (\partial X_y - \partial Y_x) = 0,$$

diese andere

$$(\mathbb{C})\cdots \quad 2(ax - c_1) = 0,$$

welche offenbar nur dann erfüllt ist, wenn $a = c_1 = 0$ genommen wird, d. h. wenn das gegebene a der Null gleich seyn sollte, und wenn man statt des allgemeinen ersten Integrals (5.) nur das besondere Integral für $c_1 = 0$ nehmen wollte.

Und ist dies der Fall, d. h. hat man $a = 0$ und auch $c_1 = 0$ genommen, dann ist auch wieder das Integral der (5.) kein anderes als

$$y = Cz \quad \text{oder} \quad z = c \cdot y.$$

Wir bemerken aber, daß wir uns nicht wundern dürfen, wenn wir auf diesem Wege, auch wenn $a = 0$ gegeben ist, doch nicht das allgemeine zweite Integral der gegebenen Differenzialgleichung erhalten, weil wir unter allen Integralen hier in der That nur diejenigen heraus-

suchen und hinstellen wollten, welche nicht bloß der gegebenen Differenzialgleichung, sondern auch noch einer zweiten Bedingung genügen, nämlich der Bedingung, daß y jede beliebige Funktion von x bleiben soll. Diese zweite Bedingung bestimmt aber hier die erste Konstante c_1, macht $c_1 = 0$, und liefert daher statt des allgemeinen ersten Integrals des allgemeinen ersten Integrals von $V = 0$, bloß das allgemeine erste Integral eines besondern ersten Integrals von $V = 0$.

Anmerkung. Ist in der gegebenen Gleichung des (§. 400.) $m = n$, und enthält sie überdies nicht x selbst, sondern nur y und z nebst den Ableitungen von y und von z nach x genommen, so kann man nach (§. 391.) und nach (Anmerkung 3. zu §. 282. d. V. Th. d. S.) versuchen, dadurch, daß man $\partial z_y \cdot \partial y_x$ statt ∂z_x, ferner $\partial^2 z_y \cdot \partial y_x^2 + \partial z_y \cdot \partial^2 y_x$ statt $\partial^2 z_x$, u. s. w. substituirt, die Gleichung $V = 0$ in eine andere zu verwandeln, welche keine Spur von x mehr hat. — Geschieht dies nun, und verschwindet in der That jede Spur von x von selbst, so wird man den hiesigen Fall (N. I. d. §. 404.) haben. — Verschwindet aber jede Spur von x nur dadurch, daß man diejenigen Glieder, welche noch mit Ableitungen nach x behaftet sind (nach der oben erwähnten Substitution) der Null gleich setzt, und dabei findet, daß die dadurch entstehenden einzelnen Gleichungen sich mit einander vertragen, so würde man den Fall (N. II. des §. 404.) haben. — Jedesmal aber sind die hier in den (§§. 400—404.) geführten Untersuchungen viel allgemeiner, weil in ihnen die Gleichung $V = 0$ auch x selbst enthalten, endlich weil auch m hier von n verschieden seyn kann.

§. 405. Zusatz.

Ist in der Aufgabe des (§. 400.) $m = 1$, aber n beliebig, und hat man das allgemeine Integral

1) $f_{x,y,y_1,\ldots y_{n-1},z,c} = 0$ der Differenzialgleichung

2) $V = 0$,

mit der willkührlichen Konstante c gefunden, so daß ein solches wirklich existirt; so hat die Gleichung $V = 0$, wenn auch erst

nach gehöriger Umformung, allemal auch einen integrirenden Faktor z.

Denkt man sich nämlich das Integral $f = 0$ nach der Konstante c algebraisch aufgelöst, also in der Form

$$\varphi_{x,y,y_1,\cdots y_{n-1},z} = c$$

geschrieben, und dann nach allem x differenziirt, so erhält man

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot y_1 + \partial\varphi_{y_1} \cdot y_2 + \cdots + \partial\varphi_{y_{n-1}} \cdot y_n + \partial\varphi_z \cdot z_1 = 0;$$

und da diese Gleichung mit der obigen $V = 0$, nachdem sie so umgeformt ist, daß sie die Form

$$\psi + P \cdot z_1 = 0$$

angenommen hat, zusammenfallen muß, so ist $\frac{\partial\varphi_z}{P}$ der gesuchte integrirende Faktor ξ, der demnach mit φ zugleich existirt.

§. 406. Zusatz.

Daraus folgt:

I. Weil in der Gleichung des (§. 402.), nämlich in der Gleichung

$$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X = 0,$$

(wo Z, Y, X Funktionen von x, y und z sind, ohne selbst noch Ableitungen zu enthalten) die Funktion $V = Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X$ bereits die im (§. 398. N. I.) erwähnte Form hat, so folgt, daß wenn die im (§. 402. ⊙) stehende Bedingungsgleichung der Integrabilität.

$$X \cdot (\partial Y_z - \partial Z_y) + Y \cdot (\partial Z_x - \partial X_z) + Z \cdot (\partial X_y - \partial Y_x) = 0,$$

ohne daß durch sie z selbst noch eine Bestimmung erhält, erfüllt ist, so daß allemal ein allgemeines Integral

$$f_{x,y,z,c} = 0$$

existirt, dann auch nothwendig ein, die Funktion

$$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X$$

integrirender Faktor ξ im Sinne des (§. 395.) existiren müsse.

II. Es ist daher ganz einerlei, wenn die Gleichung

1) $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$, d. h. $Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X = 0$

allgemein integrirt werden soll, ob nach (§. 400. d. h. nach §. 402.) verfahren wird, also ob man die beiden Gleichungen

2) $\partial z_x = -\frac{X}{Z}$ und 3) $\partial z_y = -\frac{Y}{Z}$

nach den (§. §. 296. 297. d. V. Th. d. S.) integrirt, oder ob man für die Funktion

$$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X$$

den integrirenden Faktor ξ sucht, und dann die Gleichung

$$\int (\xi \cdot Z \cdot \partial z_x + \xi \cdot Y \cdot \partial y_x + \xi \cdot X) \cdot dx = C$$

zum Integral nimmt, wo C eine willkührliche Konstante ist. *)

Anmerkung. In besondern Fällen können auch besondere Wege das Auffinden des Integrals erleichtern.

Gesetzt es wären Z, Y und X homogene Funktionen von x, y und z, so könnte man

$$x = p \cdot z \quad \text{und} \quad y = q \cdot z$$

setzen, so daß dadurch

$$X = z^n \cdot P, \quad Y = z^n \cdot Q \quad \text{und} \quad Z = z^n \cdot R$$

wird, wo P, Q, R bloß Funktionen der beiden Veränderlichen p und q sind. Die gegebene Differenzialgleichung

---

*) Damit aber das eine oder das andere möglich sey, muß die Bedingungsgleichung

$$(\odot) \cdots \quad X \cdot (\partial Y_z - \partial Z_y) + Y \cdot (\partial Z_x - \partial X_z) + Z \cdot (\partial X_y - \partial Y_x) = 0$$

erfüllt seyn, ohne z selbst zu bestimmen. — Ist jedoch diese Bedingungsgleichung dadurch erfüllt, daß einzeln identisch

$$\partial Y_z - \partial Z_y = 0, \quad \partial Z_x - \partial X_z = 0 \quad \text{und} \quad \partial X_y - \partial Y_x = 0$$

ist, so ist $Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X$ an sich schon integrabel, und statt des gesuchten Integrals kann man dann bloß (weil $\xi = 1$ ist)

$$\int (Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X) \cdot dx = c$$

nehmen. (Vgl. §. 393.).

1) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x=0,$$

wo sich die bloßen ∂ auf einen beliebigen neuen Veränderlichen t beziehen, von welchem x selbst wieder als Funktion gedacht wird, geht dadurch über in

2) $$\frac{\partial z}{z}=-\frac{P\cdot\partial p+Q\cdot\partial q}{P\cdot p+Q\cdot q+R}.$$

Ist nun die Gleichung (1.) integrabel, so muß es auch die (2.) seyn, die auf der rechten Seite bloß p und q enthält. Man hat daher nun

3) $$log\ z=C-\int\frac{P\cdot\partial p+Q\cdot\partial q}{P\cdot p+Q\cdot q+R}\cdot dt\ *)$$

II. In denjenigen besonderen Fällen dagegen, wo

$$P\cdot p+Q\cdot q+R$$

der Null gleich werden sollte, würde man statt der Gleichung (2.) bloß erhalten

$$P\cdot\partial p+Q\cdot\partial q=0,$$

welche überhaupt nur zwei Veränderliche enthält, und als solche noch integrirt werden muß.

Zu diesem letztern Fall gehören aber folgende Beispiele

Beispiel 1. So findet man auf diesem Wege das Integral der Gleichung

---

*) Will man aber für diesen Fall die Bedingungsgleichung der Integrabilität noch besonders finden, so hängt solche offenbar nur von der Integrabilität des Ausdrucks zur Rechten in (2.) ab, welcher die Form hat

$$\frac{P}{P\cdot p+Q\cdot q+R}\cdot\partial p+\frac{Q}{P\cdot p+Q\cdot q+R}\cdot\partial q,$$

und welcher daher nach (§. 340.) integrabel ist, wenn

$$\partial\left(\frac{P}{P\cdot p+Q\cdot q+R}\right)_{(q)}=\partial\left(\frac{Q}{P\cdot p+Q\cdot q+R}\right)_{(p)}$$

d. h. wenn

$$(Q\cdot q+R)\cdot\partial P_q-(P\cdot p+R)\cdot\partial Q_p+Q\cdot p\cdot\partial P_p-P\cdot q\cdot\partial Q_q$$
$$+Q\cdot\partial R_p-P\cdot\partial R_q=0$$

ist.

$$(bx-cy)\cdot\partial z+(cz-ax)\cdot\partial y+(ay-bz)\cdot\partial x = 0$$

sogleich wie folgt, nämlich

$$ay-bz = C\cdot(cz-ax),$$

wo C die willkührliche Konstante ist.

Beispiel 2. Von der Gleichung

$$(x^2+xy+y^2)\cdot\partial z+(x^2+xz+z^2)\cdot\partial y+(y^2+yz+z^2)\cdot\partial x = 0$$

findet sich das allgemeine Integral

$$xy+xz+yz+C\cdot(x+y+z) = 0$$

mit der willkührlichen Konstante C.

Beispiel 3. Bei der Gleichung

1) $\frac{x}{z}\cdot(y^2-x^2)\cdot\partial z+z\cdot(y-x)\cdot\partial z-z^2\cdot\partial y+(x^2-y^2+z^2)\cdot\partial x = 0$

findet man

$$P = p^2-q^2+1; \quad Q = -1 \text{ und } R = q-p+p\cdot(q^2-p^2);$$

also reduzirt sich die gegebene Differenzialgleichung, weil hier wiederum

$$P\cdot p+Q\cdot q+R = 0$$

ist, sogleich auf die Gleichung

2) $$(p^2-q^2+1)\cdot\partial p-\partial q = 0,$$

welche nun noch integrirt werden muß.

Weil dieser letztern aber $q = p$ genügt, so führe man statt q einen neuen Veränderlichen r mittelst der Gleichung $q = p+\frac{1}{r}$ ein, und die (2.) wird dadurch übergehen in

3) $$\partial r-2pr\cdot\partial p = \partial p,$$

und giebt, weil sie lineär ist, nach (§. 349.) sogleich

4) $$e^{-pp}\cdot r = \int e^{-pp}\cdot dp+C \text{ oder } \frac{e^{-pp}}{q-p} = \int e^{-pp}\cdot dp+C,$$

welches das gesuchte allgemeine Integral ist, und wo man nur noch statt p und q ihre Werthe $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ setzen darf, um das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung (1.) in x, y und z ausgedrückt zu haben. *)

---

*) Uebrigens sind dies dieselben 3 Beispiele, welche schon im (§. 402.) behandelt worden sind.

B. Integration der Differenzialfunktionen und der totalen Differenzialgleichungen mit vier und mehr Veränderlichen.

§. 407.

I. Betrachten wir eine Funktion V, welche außer x noch drei oder mehr Funktionen y, z, w, ꝛc. ꝛc. von x, und die Ableitungen bis beziehlich zu $\partial^n y_x$, $\partial^m z_x$, $\partial^r w_x$, ꝛc. ꝛc. hin enthält, so erhält man außer den beiden Bedingungsgleichungen der Integrabilität (I. und II. des §. 392.) für jede neue Funktion w ꝛc. ꝛc. noch eine neue Bedingungsgleichung, namentlich für w noch die Gleichung

$$S\left[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V_{w_a})\right]_{a+b=r} = 0.$$

II. Diese Bedingungsgleichungen der Integrabilität werden aber in den einzelnen Fällen allemal noch in mehrere einzelne Gleichungen zerfallen. Namentlich zerfallen sie, wenn

$$V = Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X + W \cdot \partial w_x$$

integrabel seyn soll, in die 6 Gleichungen

1) $\partial Z_y - \partial Y_z = 0$; 2) $\partial Z_x - \partial X_z = 0$; 3) $\partial Z_w - \partial W_z = 0$;

4) $\partial Y_x - \partial X_y = 0$; 5) $\partial Y_w - \partial W_y = 0$; 6) $\partial X_w - \partial W_x = 0$,

wenn nur Z, Y, X, W Funktionen der 4 Veränderlichen w, x, y und z sind, und selber keine Ableitungen mehr enthalten.

III. Muß für V ein integrirender Faktor ξ gesucht werden, so ist er durch dieselbe Bedingungsgleichungen der Integrabilität in (I. oder II.) gegeben, sobald man nur im Allgemeinen Falle der (I.) $\xi \cdot V$ statt V, oder in dem besonderen Falle der (II.) $\xi \cdot Z$, $\xi \cdot Y$, $\xi \cdot X$, $\xi \cdot W$ beziehlich statt Z, Y, X oder W schreibt.

Weil aber die Integration dieser für ξ vorhandenen Parzialgleichungen zu neuen Bedingungsgleichungen führt (in so ferne dieser Faktor ξ mehreren Gleichungen zugleich zu genügen hat), so wird nicht jedesmal ein solcher integrirender Faktor existiren. Und wenn ein solcher existirt, so können deren mehrere und unendlich viele zu gleicher Zeit existiren.

IV. Für den besondern Fall, wo für

$$V = Z\cdot\partial z_x + Y\cdot\partial y_x + X + W\cdot\partial w_x$$

unter der Voraussetzung, daß Z, X, Y und W Funktionen der 4 Veränderlichen w, x, y und z sind, der integrirende Faktor ξ gesucht würde, hätte man zu seiner Bestimmung die 6 Gleichungen

1) $\partial(\xi\cdot Z)_y - \partial(\xi\cdot Y)_z = 0$; 2) $\partial(\xi\cdot Z)_x - \partial(\xi\cdot X)_z = 0$;

3) $\partial(\xi\cdot Z)_w - \partial(\xi\cdot W)_z = 0$; 4) $\partial(\xi\cdot Y)_x - \partial(\xi\cdot X)_y = 0$;

5) $\partial(\xi\cdot Y)_w - \partial(\xi\cdot W)_y = 0$; 6) $\partial(\xi\cdot X)_w - \partial(\xi\cdot W)_x = 0$.

Diese führen aber wieder, wenn man ganz analog nach (§. 396.) verfährt, zu den 4 Bedingungsgleichungen

α) $X\cdot(\partial Y_z - \partial Z_y) + Y\cdot(\partial Z_x - \partial X_z) + Z\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) = 0$,

β) $W\cdot(\partial Y_z - \partial Z_y) + Y\cdot(\partial Z_w - \partial W_z) + Z\cdot(\partial W_y - \partial Y_w) = 0$,

γ) $W\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_w - \partial W_z) + Z\cdot(\partial W_x - \partial X_w) = 0$,

δ) $W\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) + X\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_x - \partial X_w) = 0$,

welche von den gegebenen Funktionen Z, Y, X, W der 4 Veränderlichen w, x, y und z erfüllt seyn müssen, wenn ein solcher integrirender Faktor ξ existiren soll. *)

V. Ist die gegebene Funktion V nicht bloß nach y, ∂y, $\partial^2 y$, ꝛc. ꝛc., sondern auch nach z, ∂z, $\partial^2 z$, ꝛc. ꝛc., w, ∂w, $\partial^2 w$, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. lineär (so daß also alle vorkommenden Koeffizienten

---

*) Ob diese 4 Bedingungsgleichungen für die Existenz eines solchen integrirenden Faktors ξ auch ausreichen, d. h. ob nicht auch noch eine 5te Bedingungsgleichung erfüllt seyn muß, wenn wirklich ein solcher existiren soll, geht aus der obigen Darstellung noch nicht hervor.

Wir bemerken aber hier einstweilen, daß die 4 Gleichungen ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) nicht von einander unabhängig sind, sondern daß jede derselben eine nothwendige Folge der 3 übrigen ist. Multiplizirt man nämlich jede von dreien dieser 4 Gleichungen mit demjenigen der 4 Buchstaben

Z, Y, X oder W,

der in ihr selbst nicht vorkommt, so wird man diese 3 Produkte nur addiren oder subtrahiren dürfen, und die 4te dieser Gleichungen wird sogleich hervorgehen.

bloß Funktionen von x allein sind), so ist der integrirende Faktor ξ eine bloße Funktion von x, welche übrigens auch bloß Gleichungen zu genügen hat, die nach ξ und den Ableitungen $\partial\xi$, $\partial^2\xi$, ꝛc. ꝛc. lineär sind.

Und $$U = \int(\xi \cdot V) \cdot dx$$

wird dann, wie in den (§§. 349. und 397.) gefunden, nur daß hier für jede neue Funktion w, ꝛc. ꝛc., welche V noch in sich aufgenommen hat, wiederum neue, den dortigen ganz analoge Glieder noch hinzutreten.

VI. Und ist 1) $V = 0$,

so ist 2) $U = C$

das allgemeine Integral dieser Gleichung (1.) in dem Sinne des (§. 398. IV.), wenn man unter U entweder $\int V \cdot dx$ oder $\int(\xi \cdot V) \cdot dx$ versteht. Hat dieses U bereits eine willkührliche Konstante in sich aufgenommen, wie dies jedesmal stillschweigend vorausgesetzt werden kann, so ist statt $U = C$ auch bloß

3) $U = 0$

zu schreiben.

VII. Und hat man mehrere solche Gleichungen wie $V = 0$, so kann man versuchen, an deren Stelle mehrere solche allgemeine Integrale $U = 0$ zu setzen, wobei man jedesmal überzeugt seyn kann, daß die letztern (Integral-) Gleichungen die erstern ganz und vollständig ersetzen. Und so kann man zu einer gleichzeitigen Integration geführt werden, wie in dem (§. 398.) für Gleichungen zwischen nur 3 Veränderlichen bereits gezeigt worden ist.

§. 408.

Aber eben so kann auch alles, was in den (§§. 400—406.) für Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen gesagt ist, nun auch auf Gleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen ausgedehnt werden. — Namentlich findet hier wieder zunächst die Aufgabe statt, welche der im (§. 400.) gestellten analog ist.

I. Betrachtet man nur den einfachsten Fall derselben, wo

1) $$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X + W \cdot w_1 = 0$$

gegeben ist, während Z, Y, X und W Funktionen der 4 Veränderlichen x, y, z und w sind, und wo z_1, y_1, w_1 statt der Ableitungen ∂z_x, ∂y_x, ∂w_x stehen. — Wird hier

$$z = z_{w,x,y}$$

gesucht, so muß man hier statt z_1 oder ∂z setzen

$$\partial z_w \cdot w_1 + \partial z_x + \partial z_y \cdot y_1 ;$$

und geschieht dies, so zerfällt die Gleichung (1.) sogleich (wegen der Willkührlichkeit von y_1, w_1) in die 3 Gleichungen

2) $$X + Z \cdot \partial z_x = 0; \quad Y + Z \cdot \partial z_y = 0; \quad W + Z \cdot \partial z_w = 0.$$

Werden nun diese 3 Gleichungen nach dem (§. 299. d. V. Th. d. S.) integrirt, so erhält man nicht bloß die gesuchte Gleichung zwischen z, y, x und w, nämlich

$$z = z_{x,y,w},$$

sondern auch noch die Bedingungsgleichungen der Integrabilität.

Will man aber diese letztere allein haben, so darf man nur von jeder der 3 Gleichungen (2.) die Differenzialgleichungen nehmen, nach den beiden der 3 unabhängig gedachten Veränderlichen x, y, w, nach welchen die Ableitung von z in ihr nicht vorkommt, und dann aus allen 9 Gleichungen die Ausdrücke ∂z_x, ∂z_y, ∂z_w, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,1} z_{x,w}$, $\partial^{1,1} z_{y,w}$ eliminiren. Man wird dann wieder zu den 3 erstern (α, β, γ, der im §. 407. N. IV.) enthaltenen Bedingungsgleichungen geführt sich sehen.

II. Man kann daher das allgemeine Integral der Gleichung

$$Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X + W \cdot \partial w_x = 0,$$

d. h. $$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X + W \cdot w_1 = 0,$$

nachdem die Bedingungsgleichungen der Integrabilität der hiesigen (Nr. I.), d. h. die des (§. 407. Nr. IV.) erfüllt sind, entweder dadurch finden, daß man die 3 Gleichungen (2.) des (§. 408.) nach dem (§. 299. d. V. Th. d. S.) integrirt, oder man kann

auch für die Funktion

$$Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X + W \cdot w_1$$

den integrirenden Faktor ξ suchen, und dann zum allgemeinen Integral die Gleichung

$$\int \xi \cdot (Z \cdot z_1 + Y \cdot y_1 + X + W \cdot w_1) \cdot dx = c$$

nehmen. (Vgl. §. 406. II.).

III. Betrachten wir überhaupt diese Gleichung

$$X_1 + X_2 \cdot \partial(x_2)_{x_1} + X_3 \cdot \partial(x_3)_{x_1} + \cdots + X_n \cdot \partial(x_n)_{x_1} = 0,$$

wo $X_1, X_2, X_3, \cdots X_n$ Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ sind, während $x_2, x_3, \cdots x_n$ als Funktionen von x_1 gedacht werden, deren Ableitungen nach x_1 genommen in der gegebenen Differenzialgleichung in lineärer Form vorkommen; so findet sich bald für sie folgendes:

1) Damit diese gegebene totale Differenzialgleichung zwischen n Veränderlichen, d. h. die Gleichung

$$X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + X_3 \cdot \partial x_3 + \cdots + X_n \cdot \partial x_n = 0,$$

wo sich die bloßen ∂ alle auf einen neuen Veränderlichen t beziehen, von welchem x_1 selbst wieder als Funktion gedacht wird, und in welcher $X_1, X_2, X_3, \cdots X_n$ Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ sind, einen integrirenden Faktor ξ habe, finden so viele Bedingungsgleichungen der Integrabilität statt, als sich n Dinge zu dreien verbinden lassen, also $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

2) Diese Bedingungsgleichungen der Integrabilität gehen alle aus dieser einzigen hervor

$$X_a \cdot [\partial(X_b)_{x_c} - \partial(X_c)_{x_b}] + X_b \cdot [\partial(X_c)_{x_a} - \partial(X_a)_{x_c}] + X_c \cdot [\partial(X_a)_{x_b} - \partial(X_b)_{x_a}] = 0,$$

so bald man statt a, b, c alle möglichen, aber von einander verschiedenen ganzen Zahlen setzt, welche 1, 2, 3, 4, ꝛc. oder n sind.

3) Alle diese $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Bedingungsgleichungen der Integrabilität sind aber nicht von einander unabhängig, sondern es

lassen sich immer $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ derselben von den $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ übrigen als algebraische Folgerungen herleiten, so daß die letzteren allein zur Bedingung der Integrabilität vollkommen ausreichen.

4) Es ist einerlei, ob man die Gleichung

$$\alpha) \qquad X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + X_3 \cdot \partial x_3 + \cdots + X_n \cdot \partial x_n = 0$$

mit diesem integrirenden Faktor ξ multiplizirt, und dann

$$\beta) \qquad \int (\xi \cdot X_1 \cdot \partial x_1 + \xi \cdot X_2 \cdot \partial x_2 + \cdots + \xi \cdot X_n \partial x_n) \cdot dt = C$$

zum allgemeinen Integral nimmt, oder ob man x_n als eine Funktion von $x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}$ durch die $n-1$ Parzialgleichungen gegeben sich denkt,

$$\gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} X_1 & + X_n \cdot \partial (x_n)_{x_1} & = 0, \\ X_2 & + X_n \cdot \partial (x_n)_{x_2} & = 0, \\ X_3 & + X_n \cdot \partial (x_n)_{x_3} & = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1} & + X_n \cdot \partial (x_n)_{x_{n-1}} & = 0; \end{array} \right\}$$

und diese $n-1$ Parzialgleichungen nun nach Anleitung der (§. §. 296—300. d. V. Th. d. S.) zu integriren versucht.

5) Und da man aus diesen letztern Gleichungen (γ) die Werthe der $n-1$ Ableitungen $\partial (x_n)_{x_1}, \partial (x_n)_{x_2}, \cdots \partial (x_n)_{x_{n-1}}$ finden kann; da ferner für jeden Werth von a und b, welcher $1, 2, 3, \cdots$ oder $n-1$ ist, allemal

$$\partial \left(\partial (x_n)_{x_a} \right)_{x_b} = \partial \left(\partial (x_n)_{x_b} \right)_{x_a}$$

seyn muß: so erhält man eben hieraus wieder, wenn man statt $\partial (x_n)_{x_a}$ und $\partial (x_n)_{x_b}$ ihre Werthe aus (γ) substituirt, die oben in (4.) erwähnten $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen der Integrabilität.

6) Sind diese $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen der In-

tegrabilität erfüllt, ohne daß sie selber zur Bestimmung von x_n als Funktion der n—1 Veränderlichen $x_1, x_2, x_3 \cdots x_{n-1}$ beytragen, so existirt allemal ein allgemeines Integral der gegebenen totalen Differenzialgleichung

$$X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + X_3 \cdot \partial x_3 + \cdots + X_n \cdot \partial x_n = 0;$$

daher existirt dann auch allemal ein integrirender Faktor ξ derselben Differenzialgleichung oder vielmehr der Differenzialfunktion

$$X_1 + X_2 \cdot \partial(x_2)_{x_1} + X_3 \cdot \partial(x_3)_{x_1} + \cdots + X_n \cdot \partial(x_n)_{x_1}.$$

7) Weil aber zur Bestimmung des integrirenden Faktors ξ nach (§. 407.) allemal $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen sich ergeben, und darunter $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen seiner Existenz sich befinden, so bleiben zu seiner Bestimmung nur noch $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ d. h. n—1 Gleichungen übrig.

IV. Endlich bemerken wir noch, daß auch das, was im (§. 404.) als wichtig hervorgehoben werden mußte, auf gegebene totale Differenzialgleichungen zwischen 4 und mehr Veränderlichen ohne weiteres Anwendung findet, und in jedem Falle gehörig beachtet werden muß. — Man wird also auch hier die beiden Fälle unterscheiden müssen, 1) wo man ein allgemeines Integral erhält, und 2) wo das Resultat nicht die zum allgemeinen Integral nöthige Allgemeinheit hat, sondern wo man zu eigenthümlichen besonderen Auflösungen gelangt.

C. Betrachtung derselben in (A.) und in (B.) geführten Untersuchungen, unter der Voraussetzung, daß der bisher als unabhängig gedachte Veränderliche x, selber wieder als Funktion eines beliebigen, aber neuen Veränderlichen t angesehen wird.

§. 409.

1. Es sey endlich V eine Funktion von $x, y, \partial y_x, \cdots \partial^n y_x,$

allein, oder sie enthalte auch noch z, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ... $\partial^m z_x$, und auch noch w, ∂w_x, $\partial^2 w_x$, ... $\partial^l w_x$, und noch mehr oder weniger solche Funktionen von x mit ihren Ableitungen; es genüge aber dieses V allen Bedingungsgleichungen der Integrabilität (so vielen nämlich von der Form

$$S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial V_{y_a})\right]_{a+b=n} = 0,$$

als Funktionen y, z, w, 2c. von x in V wirklich vorkommen); man habe ferner bereits eine Funktion

U von x, y, ∂y_x, ... $\partial^{n-1} y_x$, z, ∂z_x, ... $\partial^{m-1} z_x$, w, 2c. 2c.

gefunden, so daß

1) $$U = \int V \cdot dx \quad \text{oder} \quad \partial U_{(x)} = V$$

ist. — Denkt man sich nun in dieser Gleichung (1.), in welcher y, z, w, 2c. als beliebige Funktionen von x gedacht sind, auch noch x als eine beliebige Funktion von t, so stellen auch y, z, w, 2c. Funktionen von t vor; und man hat dann nach (Kap. III. d. III. Th. d. S.) oder nach (§. 392.)

$$\partial y_x = \frac{\partial y}{\partial x}; \qquad \partial^2 y_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}; \text{ u. s. w.}$$

$$\partial z_x = \frac{\partial z}{\partial x}; \qquad \partial^2 z_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}; \text{ u. s. w.}$$

2c. 2c. 2c.,

wo alle bloßen ∂ Ableitungen nach t bedeuten. — Setzt man nachgehends diese Ausdrücke zur Rechten der (=) Zeichen statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, 2c. 2c., ∂z_x 2c. 2c. 2c. in U und in V, so werden U und V Funktionen, welche x, y, z, w, 2c. 2c. und Ableitungen von x, y, z, w, 2c. nach t enthalten; aber immer ist noch wie in (1.)

2) $$U = \int V \cdot dx = \int (V \cdot \partial x_t) \cdot dt$$

so lange nur V den Veränderlichen t selbst nicht explizit enthält. *)

*) Diese Bedingung ist jedoch wohl und sorgfältig zu beachten,

II. Hätte man aber direkt $V \cdot \partial x_t$, in dieser neuen Form gegeben, und U dazu gesucht, so hätte man zunächst dieselben Bedingungsgleichungen der Integrabilität erhalten, wie vorher auch, nur daß jetzt $V \cdot \partial x_t$ statt V geschrieben werden muß, und die Zeichen y_1, y_2, ꝛc. z_1, z_2 ꝛc. nicht mehr Ableitungen nach x, sondern Ableitungen nach t vorstellen müssen. Außerdem bekommt man aber noch eine Gleichung mehr, welche aus der Unabhängigkeit des x_t hervorgeht, und nachstehende

$$3) \qquad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial (V \cdot x_1)_{x_a})\right]_{a+b=k} = 0$$

seyn wird, wenn man ∂x_t, $\partial^2 x_t$, ꝛc. ꝛc. beziehlich durch x_1, x_2, ꝛc. bezeichnet, und wenn k die höchste Ordnung der Ableitungen von x nach t ist, welche in $V \cdot \partial x_t$ vorkommt. — Man muß aber ja nicht übersehen, daß sowohl in dieser letztern, als auch in den übrigen Bedingungsgleichungen der Integrabilität, von der Form

$$4) \qquad S\left[(-1)^a \cdot \partial^a (\partial (V \cdot x_1)_{y_a})\right]_{a+b=n} = 0, \qquad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

y_a, z_a, ꝛc. nicht mehr $\partial^a y_x$, $\partial^a z_x$, ꝛc. ꝛc., sondern jetzt $\partial^a y_t$, $\partial^a z_t$ ꝛc. vorstellen, während die bloßen ∂ nun nicht mehr Ableitungen nach allem x, sondern jetzt Ableitungen nach allem t bedeuten. —

III. Diese Bedingungsgleichungen sind jedoch nicht alle von einander unabhängig, sondern jede derselben ist jedesmal in allen übrigen enthalten, so daß sie nothwendig mit erfüllt ist, sobald nur die übrigen alle erfüllt sind.

Um dies einzusehen, darf man nur das Verfahren der (§. §. 339. 392.) wiederholen, durch welches die Bedingungen erhalten werden, unter denen, wenn $V \cdot x_1$ durch V' bezeichnet wird,

$$U = \int V' \cdot dt$$

allemal existirt, so daß dieses U die Ableitungen von x, y, z, ꝛc. ꝛc.

---

weil ausserdem nicht mehr

$$U = \int V \cdot dx$$

einerlei wäre mit

$$U = \int (V \cdot \partial x_1) \cdot dt.$$

nach t, alle am eine Ordnung niedriger enthält als V', und dabei,

$$\delta U_{(t)} = V'$$

wird, welche Funktion von t auch immer unter x, y, z, ꝛc. gedacht werden mögen.

Setzen wir aber dabei der Kürze wegen voraus, daß V' oder $V{\cdot}x_1$ bloß die 3 Veränderlichen x, y und z und deren Ableitungen nach t enthalte.

Da nämlich $U = \int V'{\cdot}dt$ bleiben soll, auch wenn $x_{u'}\ y_{u'}\ z_{u'}$ statt beziehlich x, y, z gesetzt werden, da also auch

$$U_u = \int V'_u{\cdot}dt$$

und demnach auch $\delta U = \int \delta V'{\cdot}dt$

werden soll, so zeigt sich nach (§. §. 339. 392.) als Bedingung der Integrabilität

5) $S[(-1)^a{\cdot}\partial^a(\partial V'_{x_a})]{\cdot}\delta x + S[(-1)^b{\cdot}\partial^b(\partial V'_{y_b})]{\cdot}\delta y + S[(-1)^c{\cdot}\partial^c(\partial V'_{z_c})]{\cdot}\delta z = 0.$

Diese Gleichung (5.) muß statt finden, wenn $\delta x, \delta y, \delta z$ ganz unabhängig von einander sind, zerfällt also in die 3 Gleichungen

6) $S[(-1)^a{\cdot}\partial^a(\partial V'_{x_a})] = 0,$

7) $S[(-1)^b{\cdot}\partial^b(\partial V'_{y_b})] = 0,$

8) $S[(-1)^c{\cdot}\partial^c(\partial V'_{y_c})] = 0.$

Setzt man nun in V' statt y und z ganz beliebige aber bestimmte Funktionen y_x und z_x von x, so geht V' in $V{\cdot}\partial x_1$ über, wo V bloß x und selbst keine Ableitung von x mehr enthält. Dann existirt aber allemal ein Integral U_x, so daß

$$U_x = \int V'{\cdot}dt$$

ist für jede Funktion x von t, also auch wenn man x_u d. h.

$$x + \varkappa{\cdot}\delta x + \cdots$$

statt x setzt. Durch das letztere gehen nun y und z in y_u und z_u über, so jedoch, daß $\delta y, \delta z$ nicht beliebig und von einander und von δx unabhängig sind; sondern es ist nach (Kap. XI. d. V. Th. d. S.)

9) $\delta y = \partial y_x{\cdot}\delta x$

und

10) $\delta z = \partial z_x{\cdot}\delta x.$

Weil aber in diesem Sinne immer

$$U_x = \int V'_x \cdot dt, \quad \text{also} \quad \delta U = \int \delta V' \cdot dt$$

existirt, so muß immer die Gleichung (5.) für die jetzigen δy und δz existiren d. h. es muß immer, wenn man (9. und 10.) zu Hilfe nimmt,

11) $$S[(-1)^a \cdot \partial^a(\partial V'_{x_a})] + S[(-1)^b \cdot \partial^b(\partial V'_{y_b})] \cdot \partial y_x + S[(-1)^c \cdot \partial^c(\partial V'_{z_c})] \cdot \partial z_x = 0$$

seyn, es mögen übrigens die Bedingungen der Integrabilität (6—8.) erfüllt seyn oder nicht, während jedoch ∂y_x, ∂z_x jetzt völlig bestimmte Funktionen von x sind. Und weil aus der Gleichung (11.) und aus noch zweien der Gleichungen (6—8.) die dritte dieser letztern Gleichungen allemal mit Nothwendigkeit hervorgeht, so ist das oben behauptete ausser Zweifel gesetzt.

IV. Diese Bedingungsgleichungen, wie sie in (I.) vorausgesetzt, und die anderen, wie solche in (II.) gedacht sind, müssen noch überdieß genau in einander übergehen können, da beide Systeme von Bedingungsgleichungen ein und dasselbe bedingen, nämlich daß ein $U = \int V \cdot dx = \int (V \cdot \partial x_t) \cdot dt$ existirt, während y, z, w 2c. 2c. als beliebige Funktionen von x, — oder y, z, w, 2c. und x als beliebige Funktionen von t gedacht sind.

Beispiel. Hat man z. B.

1) $$V = Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X + W \cdot \partial w_x,$$

wo Z, Y, X, W gegebene Funktionen von w, x, y und z sind, welche den 6 Bedingungsgleichungen der Integrabilität

$$(\odot)\cdots \left\{ \begin{array}{lll} \partial Z_y - \partial Y_z = 0, & \partial Z_x - \partial X_z = 0, & \partial Z_w - \partial W_z = 0 \\ \partial Y_x - \partial X_y = 0, & \partial Y_w - \partial W_y = 0, & \partial X_w - \partial W_x = 0 \end{array} \right\}$$

entsprechen; so existirt allemal

2) $$U = \int V \cdot dx$$

bloß als Funktion der 4 Veränderlichen w, x, y, z, so daß

3) $$\partial U_{(x)} = V$$

wird, während w, y und z als ganz beliebige Funktion von x gedacht und behandelt werden. — Dann ist aber, wenn U genau dieselbe Funktion bedeutet, auch noch

4) $$\partial U_{(t)} = \partial U_{(x)} \cdot \partial x_t = V \cdot \partial x_t = V',$$

wenn jetzt auch x noch als beliebige Funktion von t gedacht wird, wodurch auch y, z und w in beliebige Funktionen von t übergehen. — Weil aber aus (1.) hervorgeht

4) $$V' = V\cdot\partial x = Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w,$$

wo die bloßen ∂ sich auf t beziehen, so erhält man jedesmal ein und dieselbe Funktion U, ob man

$$V \text{ oder } Z\cdot\partial z_x + Y\cdot\partial y_x + X + W\cdot\partial w_x$$

nach allem x integrirt, oder ob man lieber

$$V' \text{ oder } Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w,$$

wo die bloßen ∂ Ableitungen nach t bedeuten, nach allem t integrirt.

Die 4 Bedingungsgleichungen für die Existenz dieses U in dieser letztern Beziehung, werden aber nach (§. 407. I.) (in so ferne

$$\partial z,\ \partial y,\ \partial x,\ \partial w \text{ durch } z_1,\ y_1,\ x_1,\ w_1$$

vorgestellt werden, und unter $z_0,\ y_0,\ x_0$ und w_0, der frühern Annahme zufolge, $z,\ y,\ x,\ w$ selbst verstanden werden muß, und dann

$$\partial V'_z = \partial Z_z\cdot z_1 + \partial Y_z\cdot y_1 + \partial X_z\cdot x_1 + \partial W_z\cdot w_1;$$
$$\partial V'_y = \partial Z_y\cdot z_1 + \partial Y_y\cdot y_1 + \partial X_y\cdot x_1 + \partial W_y\cdot w_1;$$
$$\partial V'_x = \partial Z_x\cdot z_1 + \partial Y_x\cdot y_1 + \partial X_x\cdot x_1 + \partial W_x\cdot w_1;$$
$$\partial V'_w = \partial Z_w\cdot z_1 + \partial Y_w\cdot y_1 + \partial X_w\cdot x_1 + \partial W_w\cdot w_1;$$

dagegen

$$\partial V'_{z_1} = Z; \quad \partial V'_{y_1} = Y; \quad \partial V'_{x_1} = X \text{ und } \partial V'_{w_1} = W$$

ist), nachstehende, nämlich:

$$\partial V'_z - \partial(\partial V'_{z_1}) = 0$$

d. h. 5) $(\partial Y_z - \partial Z_y)\cdot y_1 + (\partial X_z - \partial Z_x)\cdot x_1 + (\partial W_z - \partial Z_w)\cdot w_1 = 0;$

ferner $$\partial V'_y - \partial(\partial V'_{y_1}) = 0$$

d. h. 6) $(\partial Z_y - \partial Y_z)\cdot z_1 + (\partial X_y - \partial Y_x)\cdot x_1 + (\partial W_y - \partial Y_w)\cdot w_1 = 0;$

ferner $$\partial V'_x - \partial(\partial V'_{x_1}) = 0$$

d. h. 7) $(\partial Z_x - \partial X_z)\cdot z_1 + (\partial Y_x - \partial X_y)\cdot y_1 + (\partial W_x - \partial X_w)\cdot w_1 = 0;$

endlich $$\partial V'_w - \partial(\partial V'_{w_1}) = 0$$

d. h. 8) $(\partial Z_w - \partial W_z)\cdot z_1 + (\partial Y_w - \partial W_y)\cdot y_1 + (\partial X_w - \partial W_x)\cdot x_1 = 0.$

Und diese 4 Bedingungsgleichungen zerfallen, wegen der Willkührlichkeit von $z_1,\ y_1,\ x_1$ und w_1 sogleich in 9 Gleichungen, welche sich genau auf die obigen 6 Gleichungen (⊙) reduziren.

V. Aber eben der hier vorstehenden (IV.) wegen wird man auch, wenn zu V in dem erstern Sinne oder zu V′ in dem letztern Sinne (im Falle V oder V′ nicht den Bedingungen der Integrabilität entspricht) ein integrirender Faktor ξ gefunden werden sollte, (weil dann jedesmal das Produkt $\xi \cdot V$ denselben Bedingungsgleichungen unterworfen bleibt), zur Bestimmung dieses integrirenden Faktors ξ in jeder der beiden Annahmen dieselben Gleichungen haben, so daß sich in beiden Fällen dieselben integrirenden Faktoren ergeben.

VI. Man mag also U auf dem einen oder auf dem andern Wege gefunden haben und entweder als $\int V \cdot dx$ oder als $\int (\xi \cdot V) \cdot dx$, so hat man doch immer eine und dieselbe Funktion U, nur jedesmal in einer andern Form. In der letztern Form kommen nämlich Ableitungen von x, y, z, w ꝛc. ꝛc. nach t, in der erstern dagegen bloß Ableitungen von y, z, w ꝛc. ꝛc. nach x, vor. Beide Formen gehen dann nach (§. 392.) sogleich wieder in einander über.

Denkt man sich jedoch in der letztern Form $t = x$ also $\partial x_t = 1$, $\partial^2 x_t = \text{ꝛc.} = 0$, so gelangt man noch schneller zur erstern Form.

VII. Ist endlich $V = 0$, so ist auch $V \cdot \partial x_t = 0$ dieselbe totale Differenzialgleichung, eben so auch

$$\xi \cdot V = 0 \quad \text{und} \quad \xi \cdot V \cdot \partial x_t = 0,$$

und es ist also dann in jedem Falle wiederum

$$U = 0$$

das allgemeine Integral von $V = 0$, welche der beiden Formen auch unter U gedacht worden sind, wenn man nur in U die willkührliche Konstante mit aufgenommen hat.

Zweite Abtheilung.

Wie einer totalen Differenzialgleichung, wenn sie nicht ein allgemeines Integral hat, doch durch Systeme von zwei und mehr Gleichungen genügt werden kann, welche willkührliche Funktionen in sich aufnehmen, und deshalb einige Allgemeinheit haben.

Vorerinnerung.

I. Zwei Differenzialgleichungen zwischen x, y, z und den Ableitungen von y und z nach x, können entweder nach (§. §. 281. und 282. d. V. Th. d. S.) oder zuweilen auch bloß nach (§. 399.) allgemein integrirt werden, so daß man alle Funktionen y_x und z_x erhält, welche in die gegebenen Differenzialgleichungen gesetzt, solche identisch machen. — Und dies gilt auch, wenn die eine dieser Gleichungen eine Urgleichung seyn, d. h. keine Ableitungen enthalten sollte.

II. Ist dagegen nur eine einzige solche Differenzialgleichung $V = 0$ zwischen x, y, z, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ... ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ... gegeben, so muß sie erst den Bedingungsgleichungen der Integrabilität des (§. 400.) oder des (§. 403.) in Verbindung mit dem (§. 404.) genügen, wenn $z = z_{x,y,y_1,\ldots}$ so existiren und gefunden werden soll, daß der gegebenen Differenzialgleichung am allgemeinsten genügt ist, während y jede unbestimmte Funktion von x vorstellt und bleibt.

III. Und sind diese Bedingungsgleichungen der Integrabilität gar nicht erfüllt, so wird man doch aus der Gleichung $V = 0$ zu jedem beliebig aber bestimmt angenommenen y_x statt y, allemal eine Funktion z_x mit einer oder mehreren willkührlichen Konstanten finden können, so daß diese beiden Funktionen y_x, z^x, statt y und statt z gesetzt, die gegebene Differenzialgleichung identisch machen.

IV. Der Unterschied zwischen dem Falle (III.) und dem Falle (II.) besteht nur darin, daß in (II.) ein für allemal schon integrirt ist, so daß nur noch in dem Integral statt y jede beliebige Funktion von x gesetzt werden darf, um sogleich die Funktion $z = z_x$ dazu zu haben; während in (III.) für jede anders angenommene Funktion y_x, welche statt y gesetzt wird, die zugehörige Funktion $z = z_x$ allemal erst durch eine neue Integration (einer Gleichung zwischen nur 2 Veränderlichen) dazu gefunden werden kann.

V. Statt aber, wenn nur eine einzige solche Gleichung $V = 0$

gegeben ist, und diese den Bedingungsgleichungen der Integrabilität nicht entspricht, für y irgend eine Funktion von x zu setzen, und dann z durch Integration dazu zu finden; also statt die bestimmte Gleichung von der Form

$$y = y_{x'} \quad \text{zu der gegebenen} \quad V = 0$$

noch hinzufügen, kann man zu der gegebenen $V = 0$ auch noch eine Differenzialgleichung zwischen x und y, ja auch noch eine Differenzialgleichung zwischen x, y und z und den Ableitungen von y und z nach x hinzufügen, und man hat dann wieder den Fall (I.), d. h man hat dann wieder zwei Gleichungen zwischen x, y und z, und kann also das in (I.) beschriebene Verfahren sogleich eintreten lassen, um $y = y_{x'}$ $z = z_x$ dazu zu finden, und zwar die allgemeinsten Funktionen $y_{x'}$ $z_{x'}$ welche es für diesen Fall giebt.

VI. Weil aber auch in dem Falle (V.) die so beliebig noch hinzugefügte zweite Gleichung allemal anders und anders genommen werden muß, ja alle möglichen Gleichungen vorstellen kann und soll, so hat dieses Verfahren auch das Ueble, daß für jede andere Gleichung, welche zu $V = 0$ noch hinzugefügt wird, die Integration auf's neue wiederholt statt finden muß.

Man kann daher sich fragen, ob nicht jedesmal eine zweite Gleichung so hinzugedacht werden könne, daß sie (vermöge willkührlicher Funktionen, die sie in sich aufnehmen könnte) alle oder doch eine große Menge solcher zweiten Gleichungen in sich schlösse, während übrigens beide Gleichungen ein für allemal integrirt, d. h. ein für allemal auf Urgleichungen zurückgebracht werden könnten, so daß man zwei Urgleichungen hätte, welche wegen der in ihnen noch enthaltenen willkührlichen Funktionen, eine große Menge, wo nicht alle, der zusammengehörigen Funktionen y_x und z_x lieferten, ohne auf's neue integriren zu müssen, und doch so, daß jedes Paar derselben, statt y und statt z subsituirt, die gegebene $V = 0$ identisch machen würde.

Die gegenwärtige 2te Abtheilung dieses Kapitels beschäftigt sich aber mit dieser eben hingestellten Frage und mit ähnlichen Untersuchungen, und zwar in ihrer ersten Unterabtheilung bloß für Gleichungen der ersten Ordnung und von der Form

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + \cdots = 0.$$

Die zweite Unterabtheilung dagegen beschäftigt sich mit denselben Untersuchungen für die übrigen Differenzialgleichungen.

Erste Unterabtheilung.

Wenn die gegebene Differenzialgleichung von der ersten Ordnung und auch bloß von der Form

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w + \cdots = 0$$

ist.

A. Wenn die gegebene Differenzialgleichung bloß 3 Veränderliche enthält, also bloß von der Form

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0$$

ist.

§. 410.

Soll die Gleichung

1) $Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0$

oder 2) $Z\cdot\partial z_x + Y\cdot\partial y_x + X = 0,$

in welcher X, Y, Z gegebene Funktionen der 3 Veränderlichen z, y und x sind, welche der, in dem (§. 402. ⊙) gefundenen Bedingungsgleichung *) nicht genügen, doch so allgemein integrirt werden als sie es verträgt, ohne jedoch für jede neu angenommene Relation zwischen x, y und z die Integration auf's neue nöthig zu haben; so kann man diese Gleichung zuerst in dem Falle integriren, in welchem einer der 3 Veränderlichen z. B. y als konstant angesehen, also $\partial y = 0$ gedacht wird, so daß die gegebene Gleichung (1. oder 2.) in

3) $Z\cdot\partial z + X\cdot\partial x = 0$

oder 4) $Z\cdot\partial z_x + X = 0$

übergeht. Zu dem Ende suche man für diese letztere Gleichung (3. oder 4.) den integrirenden Faktor (indem man natürlich immer y als konstant ansieht), welcher

5) $M = M_{z,x}$

---

*) $Z\cdot(\partial Y_x - \partial X_y) + Y\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0.$

seyn mag, aber auch noch y enthalten wird; multiplizire die Gleichung (4.) damit, setze

$$6) \qquad \int(M\cdot Z\cdot \partial z_x + M\cdot X)\cdot dx = f_{x,z},$$

wo aber $f_{x,z}$ auch noch y enthalten wird; so ist das allgemeinste Integral der Gleichung (4.), in so ferne die willkührliche Konstante offenbar auch noch y enthalten kann, also am allgemeinsten durch φ_y ausgedrückt wird, wo φ_y jede willkührliche Funktion von y bedeutet, folgendes, nämlich

$$7) \qquad f_{z,y,x} = \varphi_y,$$

während

$$8) \quad \partial f_z = M\cdot Z \quad \text{und} \quad 9) \quad \partial f_x = M\cdot X$$

seyn muß.

Da nun diese Gleichung (7.) eine willkührliche Funktion φ_y von y enthält, also eine ziemlich allgemeine Relation zwischen x, y und z repräsentirt, so kann man für den gegenwärtigen Zweck diese Gleichung (7.) als zweite Gleichung zu der gegebenen Gleichung (1. oder 2.) noch hinzunehmen; und nun beide Gleichungen (2. und 7.) allgemein zu integriren, oder doch diesen beiden Gleichungen zu genügen suchen.

Wendet man aber auf die beiden Gleichungen (2. und 7.) nämlich auf die Gleichungen

$$2) \qquad Z\cdot \partial z_x + Y\cdot \partial y_x + X = 0$$

und

$$7) \qquad f_{z,y,x} - \varphi_y = 0$$

die Methode des (§. 281. d. V. Th. d. S.) an; so muß man die Gleichung (7.) zuvor nach allem x differenziiren, so daß man erhält

$$10) \quad \partial f_z\cdot \partial z_x + (\partial f_y - \partial \varphi_y)\cdot \partial y_x + \partial f_x = 0$$

oder, wegen (8. und 9.),

$$11) \quad M\cdot Z\cdot \partial z_x + (\partial f_y - \partial \varphi_y)\cdot \partial y_x + M\cdot X = 0;$$

und dann zwischen (2. und 11.) die Ableitung ∂z_x eliminiren. Geschieht dies nun, indem man die (2.) mit M multiplizirt, und von der (11.) subtrahirt, so erhält man als Eliminationsgleichung

die nachstehende, nämlich

$$12) \qquad (\partial f_y - M \cdot Y - \partial \varphi_y) \cdot \partial y_x = 0,$$

welche

$$13) \qquad \partial y_x = 0 \qquad \text{also} \qquad y = C$$

zum allgemeinen Integral liefert, wo C eine willkührliche Konstante ist; — welche aber auch

$$14) \qquad \partial f_y - M \cdot Y - \partial \varphi_y = 0$$

giebt, während diese letztere Gleichung, da sie keine willkührliche Konstante enthält, entweder ein besonderes Integral oder ein singulärer Werth der Differenzialgleichung (12.) seyn wird. *)

Unserer gegebenen Differenzialgleichung (1.), nämlich der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0,$$

genügt daher das System der beiden Urgleichungen

$$(\odot) \cdots \qquad f_{z,y,x} = \varphi_y \qquad \text{und} \qquad y = C$$

mit der willkührlichen Konstante C (wo dann auch φ_y eine willkührliche Konstante B seyn wird). — Derselben Differenzialgleichung genügt aber auch noch das System der beiden Urgleichungen

$$(\mathbb{C}) \cdots \qquad f_{z,y,x} = \varphi_y \qquad \text{und} \qquad \partial f_y - M \cdot Y = \partial \varphi_y,$$

in welchem keine willkührliche Konstante vorkommt.

Weil jedoch φ_y eine ganz willkührliche Funktion von y ist, so gehen aus dem letztern System ($\mathbb{C}$), indem man statt φ_y nach und nach immer andere und andere bestimmte Funktionen von y setzt, immer fort neue Paare von Funktionen y_x und z_x hervor, welche, wenn sie statt y und z in die gegebene Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

---

*) Eliminirt man aus (14. und 7.) den Veränderlichen z, und fällt dann x selbst mit heraus, so daß y einen konstanten Werth erhält, so ist (14.) ein besonderes Integral. Zeigt sich aber nach dieser Elimination des z, der Veränderliche y, als Funktion von x, so ist (14.) ein singulärer Werth der Gleichung (12.).

gesetzt werden, letztere identisch machen; während keines dieser Paare eine willkührliche Konstante in sich aufgenommen hat, die man allemal erhalten wird, so oft man in die gegebene Differenzialgleichung statt y eine der so eben für y erhaltenen Funktionen substituirt, und die Gleichung dann als eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen integrirt.

Das System (⊙) läßt sich auch so schreiben, nämlich

(♂)… $y = C$ und $f_{z,C,x} = B$,

welche letztere Gleichung sogleich z in x und B so liefert, wie es mit $y = C$ in Verbindung, geeignet ist, die (1.) identisch zu machen *).

Beispiel. Ist gegeben die Gleichung

1) $\partial z - x \cdot y^2 \cdot \partial y - x^2 \cdot y \cdot \partial x = 0$,

so hat man dasmal

2) $Z = 1$; $Y = -x \cdot y^2$ und $X = -x^2 \cdot y$,

und man muß nun nach der eben ertheilten Vorschrift zunächst die Gleichung

3) $\partial z - x^2 \cdot y \cdot \partial x = 0$ oder $\partial z_x - x^2 \cdot y = 0$

unter der Voraussetzung integriren, daß y konstant ist. Dies giebt den integrirenden Faktor $M = 1$ und das Integral

4) $f_{z,y,x} = z - \frac{1}{3}x^3 \cdot y = \varphi y$.

Diese Gleichung (4.) wird nun als eine willkührliche Abhängigkeit zwischen x, y, und z zu der gegebenen Gleichung (1.) noch hinzugenommen, und diese beiden Gleichungen (1. nnd 4.) werden nun (nach §. 281. d. V. Th. d. S.) weiter behandelt, d. h. es wird jede Spur von z aus beiden eliminirt, so daß man

---

*) Daß dieses System (⊙) oder (♂) sich ergeben müsse, konnte man voraus wissen. Denn man ging ja von der Voraussetzung aus, daß y konstant, d. h. daß $y = C$ ist. — Man nahm also zu der Gleichung $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$ noch diese andere Gleichung $y = C$ als zweite Gleichung willkührlich hinzu, eliminirte aus beiden y, d. h. dachte sich in ersterer Gleichung C unter y, also 0 unter ∂y, und integrirte sie nun als eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, wodurch gerade $f_{z,C,x} = B$ hervorging.

5) $$(x \cdot y^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \partial\varphi_y) \cdot \partial y_x = 0$$

als die Gleichung zur Bestimmung von y in x findet, welche dann, in Verbindung mit der (4.), für y und z die gesuchten Funktionen von x giebt. — Wegen der beiden Werthe, welche die Gleichung (5.) für y liefert, je nachdem man den einen Faktor oder den andern Faktor der Null gleich nimmt, erhält man also als zwei, der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügende Urgleichungen zuerst das System

(⊙ oder ♂)··· $y = C, \quad z = \tfrac{1}{3}C \cdot x^3 + B,$

und dann auch das System

(☾)··· $x \cdot y^2 - \tfrac{1}{3}x^3 = \partial\varphi_y$ und $z - \tfrac{1}{3}x^3 \cdot y = \varphi_y,$

welches zweite System unendlich viele Paare von Werthen für y und z (als Funktionen von x) liefert, welche der Gleichung (1.) genügen, je nachdem man für φ_y immer andere und andere spezielle Funktionen von y schreibt.

§. 411.

I. Damit M im (§. 410. N. 5.) ein integrirender Faktor der Gleichung (§. 410. N. 4.), nämlich der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + X \cdot \partial x = 0$$

sey, muß es der Bedingungsgleichung

α) $$\partial(M \cdot Z)_x = \partial(M \cdot X)_z$$

genügen, und dann findet sich das Integral

$$f_{z,y,x} = \varphi_y$$

aus den beiden Gleichungen (8. und 9. des §. 410.), nämlich aus

$$\partial f_z = M \cdot Z \quad \text{und} \quad \partial f_x = M \cdot X$$

nach (§. 296. d. V. Th. d. S.) noch dazu.

Nun kann es sich aber ausnahmsweise treffen, daß diese eben gefundenen M und f zu gleicher Zeit so sind, daß aus der Gleichung (§. 410. N. 14.), nämlich aus

$$\partial f_y - M \cdot Y = \partial\varphi_y,$$

sowohl x als auch z von selbst herausfallen. — Dann dient diese Gleichung zur Bestimmung von φ_y, und liefert

$$\varphi_y = \int (\partial f_y - M \cdot Y) \cdot dy.$$

In diesem Ausnahmsfalle findet sich als Integral der gegebenen totalen Differenzialgleichung

$$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x = 0$$

die einzige Gleichung

$$f_{z,y,x} = \int(\partial f_y - M\cdot Y)\cdot dy,$$

welche rechts eine willkührliche Konstante in sich aufnimmt, und daher das allgemeine Integral ist.

Hieraus ergiebt sich wieder eine Methode, die Gleichung $Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x = 0$ allgemein zu integriren, so oft sie integrabel ist. Man integrirt nämlich zuerst

$$Z\cdot\partial z+X\cdot\partial x = 0,$$

mittelst des integrirenden Faktors M, indem man y als konstant ansieht, bekommt

$$f_{z,y,x} = \varphi_{y'}$$

und bestimmt nun φ_y aus der Gleichung

$$\varphi_y = \int(\partial f_y - M\cdot Y)\cdot dy$$

noch dazu. *)

Die Voraussetzung aber, daß

$$\partial f_y - M\cdot Y$$

weder x noch z enthalte, ist erfüllt, sobald

$$\partial(\partial f_y - M\cdot Y)_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial(\partial f_y - M\cdot Y)_z = 0$$

d. h. $\partial^{1,1}f_{x,y} - \partial(M\cdot Y)_x = 0$ und $\partial^{1,1}f_{z,y} - \partial(M\cdot Y)_z = 0$

ist, während nach (§. 410. N. N. 8. und 9.)

$$\partial^{1,1}f_{x,y} = \partial(M\cdot X)_y \quad \text{und} \quad \partial^{1,1}f_{z,y} = \partial(M\cdot Z)_y$$

ist, so daß diese beiden Bedingungsgleichungen in folgende übergehen, nämlich in

$$\beta)\ \partial(M\cdot X)_y = \partial(M\cdot Y)_x \quad \text{und} \quad \gamma)\ \partial(M\cdot Z)_y = \partial(M\cdot Y)_z.$$

---

*) Man versuche dies bei den bereits im (§. 402.) behandelten Beispielen, und sehe zu, ob man die dortigen Resultate hier noch einmal erhält.

Diese 3 Gleichungen (α, β, γ) sind aber gerade die 3 Gleichungen, die nicht bloß zur Bestimmung von M dienen, sondern welche auch wieder zu der Bedingungsgleichung der Integrabilität

$$Z\cdot(\partial Y_x - \partial X_y) + Y\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0$$

führen. — Und man sieht sich also auch von dieser Seite zu dem Resultat des (§. 396.) noch einmal zurückgeführt.

Sind aber die Gleichungen (α, β, γ) nicht alle drei erfüllt, so treten dann folgende Betrachtungen ein:

II. Obgleich die willkührlich angenommene Abhängigkeit der (§. 410. R. 7.), nämlich

1) $$f_{x,z,y} = \varphi_y,$$

eine willkührliche Funktion φ_y enthält, also eine unzählige Menge von verschiedenen Abhängigkeiten zwischen x, y und z repräsentirt, so ist sie doch weit davon entfernt, alle Abhängigkeiten zu repräsentiren, welche zwischen x, y und z angenommen werden können, und welche wohl durch

2) $\psi_{x,y,z} = 0$ oder $z = \psi_{x,y}$ oder $y = \psi_{x,z}$ oder $x = \psi_{y,z}$

repräsentirt sind, wenn jedesmal ψ eine ganz willkührliche Funktion vorstellt. Die Gleichung (1.) giebt für y eine willkürliche Funktion einer bestimmten Funktion f, während die Gleichung (2.) für y eine ganz willkührliche Funktion der beiden Veränderlichen x und z liefert.

Beispiel. Gesetzt man wollte φ_y so finden, daß die Gleichung

1) $$z - \tfrac{1}{3}x^3\cdot y = \varphi_y$$

zugleicher Zeit diese andere Gleichung

2) $$y = z\cdot Sin\, x$$

wäre, so müßte man aus beiden Gleichungen z eliminiren, und x müßte dann von selbst wegfallen. Eliminirt man aber z aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$y\cdot\left(\frac{1}{Sin\, x} - \tfrac{1}{3}x^3\right) = \varphi_y;$$

da nun hier x nicht von selbst herausfällt, so ist es nicht möglich φ_y

so anzunehmen, daß die Gleichung (1.) zu gleicher Zeit auch die Abhängigkeit (2.) enthalten könnte.

III. Man kann sich aber auf demselben Wege des (§. 410.) noch zwei mal zwei andere, den dort gefundenen analoge Systeme zweier Urgleichungen verschaffen, welche der gegebenen Differenzialgleichung

$$1) \qquad Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0$$

genügen, indem man, eben so wie man im (§. 410.) y als konstant angesehen, die Gleichung in diesem Sinne integrirt, und das Integral

$$2) \qquad f_{z,y,x} = \varphi_y$$

als die willkührliche Relation zwischen x, y und z angenommen hat; nun auch x, oder auch z als konstant sich denkt, die Gleichung in diesem Sinne mittelst des integrirenden Faktors M′ oder M″ integrirt, und die Integrale

$$3) \qquad f'_{z,y,x} = \varphi'_x$$

oder $$4) \qquad f''_{z,y,x} = \varphi''_z$$

als die willkührliche Relation zwischen x, y und z nimmt; zuletzt aber aus den beiden Gleichungen (1. und 3.) oder (1. und 4.) die zweite Urgleichung dazu findet. So wie man früher im (§. 410.) erhalten hat

$$\left.\begin{matrix}(\odot)\cdots & y = C & \text{und} & f_{z,C,x} = B\\ (\mathbb{C})\cdots & \partial f_y - M\cdot Y = \partial\varphi_y & \text{und} & f_{z,y,x} = \varphi_y\end{matrix}\right\}',$$

wodurch y und z als Funktionen von x bestimmt sind; so erhält man jetzt noch

$$\left.\begin{matrix}(\odot_1)\cdots & x = C' & \text{und} & f'_{z,y,C'} = B'\\ (\mathbb{C}_1)\cdots & \partial f'_x - M'\cdot X = \partial\varphi_x & \text{und} & f'_{z,y,x} = \varphi'_x\end{matrix}\right\}',$$

wo x und y als Funktionen von z bestimmt sich finden, und noch

$$\left.\begin{matrix}(\odot_2)\cdots & z = C'' & \text{und} & f_{C'',y,x} = B''\\ (\mathbb{C}_2)\cdots & \partial f''_z - M''\cdot Z = \partial\varphi''_z & \text{und} & f''_{z,y,x} = \varphi''_z\end{matrix}\right\}',$$

wo x und z als Funktionen von y gedacht worden sind

Wenn aber auch diese 6 Systeme von Urgleichungen und namentlich die 3 Systeme $(\mathbb{C}\cdot\mathbb{C}_1\cdot\mathbb{C}_2)$, wegen der willkührli-

chen Funktionen φ_y, φ'_x, φ''_z, welche sie in sich aufgenommen haben, 3 Quellen von beliebig vielen Paaren zusammengehöriger Funktionen y_x, z_x sind, so daß jedes Paar y_x, z_x beziehlich statt y, z in die (1.) gesetzt, solche (1.) identisch machen; so sind doch die 3 Relationen zwischen x, y und z, welche hier nach und nach willkührlich noch zu der Gleichung (2.) hinzugenommen worden sind, nämlich

$$f_{z,y,x} = \varphi_y; \quad f'_{z,y,x} = \varphi'_x; \quad f''_{z,y,x} = \varphi''_z$$

nur als drei, wenn auch sehr ausgedehnte, aber doch noch sehr besondere Fälle der Abhängigkeiten anzusehen, welche zwischen x, y und z außerdem noch angenommen werden könnten, und welche in Verbindung mit (1.) immer fort zu neuen Paaren, der (1.) genügender Funktionen y_x und z_x führen.

Beispiel. So findet sich für das Beispiel zu (§. 410.), wo nämlich die Gleichung

1) $$\partial z - x \cdot y^2 \cdot \partial y - x^2 \cdot y \cdot \partial x = 0$$

gegeben war, und zu welcher man schon die beiden Systeme

$$\left\{ \begin{array}{llll} (\odot)\cdots & y = C & \text{und} & z = \frac{1}{3}C \cdot x^3 + D \\ (\mathbb{C})\cdots & x \cdot y^2 - \frac{1}{3}x^3 = \partial\varphi_y & \text{und} & z - \frac{1}{3}x^3 \cdot y = \varphi_y \end{array} \right\}$$

gefunden hat, jetzt noch die Systeme

$$\left\{ \begin{array}{llll} (\odot_1)\cdots & x = C' & \text{und} & z - \frac{1}{3}C' \cdot y^3 = D' \\ (\mathbb{C}_1)\cdots & x^2 \cdot y - \frac{1}{3}y^3 = \partial\varphi'_x & \text{und} & z - \frac{1}{3}x \cdot y^3 = \varphi'_x \end{array} \right\}$$

und noch die Systeme

$$\left\{ \begin{array}{llll} (\odot_2)\cdots & z = C'' & \text{und} & y^2 + x^2 = D'' \\ (\mathbb{C}_2)\cdots & \frac{2}{xy} = \partial\varphi''_z & \text{und} & y^2 + x^2 = \varphi''_z \end{array} \right\}.$$

Und welche bestimmte Funktion von y, von x oder von z man nun hier in ($\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}_1$ oder $\mathbb{C}_2$) statt φ_y oder φ'_x oder φ''_z substituiren mag, so hat man doch allemal zwei bestimmte Gleichungen zwischen x, y und z, aus welchen allemal zwei bestimmte Fnnktionen

$$y = y_x \quad \text{und} \quad z = z_x$$

hervorgehen, welche jedoch keine durch die Integration eingegangene willkührliche Konstante enthalten, welche aber statt y und z in die gegebene Differenzialgleichung (1.) gesetzt, diese letztere identisch machen.

IV. Man mag aber nicht übersehen, daß das Verfahren des (§. 410.) oder das der Vorstehenden (N. III.) für y und z nur genügende Werthe liefert, welche keinesweges immer als Integrale, in keinem Falle aber als ein allgemeines oder vollständiges Integral der gegebenen Differenzialgleichung angesehen werden können. Wir meinen dies so: Obgleich die Systeme der vorhergehenden (N. III.) zusammengehörige Werthe y_x und z_x liefern, welche, wenn sie in die gegebene Differenzialgleichung statt y und z substituirt werden, letztere identisch machen; so wird doch, wenn man zuerst denselben Werth z_x statt z in die Gleichung

$$Z \cdot \partial z_x + Y \partial y_x + X = 0$$

substituirt, und dann die entstehende Gleichung zwischen y und x integrirt, dadurch y in x viel allgemeiner gefunden werden, mit einer willkührlichen, noch neu hinzutretenden Konstante a, so daß der obige Werth y_x nur für einen besondern Werth der Konstante a oder gar nicht aus diesem hervorgehen wird; und dies zuletzt erwähnte Ereigniß wird eintreten, wenn der obige Werth y_x ein singulärer Werth der zuletzt bloß zwischen x und y erhaltenen Differenzialgleichung seyn sollte.

Und setzt man zuerst obiges y_x statt y in die gegebene Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z_x + Y \cdot \partial y_x + X = 0,$$

und integrirt man dann die entstehende Gleichung zwischen z und x; so wird man die zugehörigen Werthe von z in x wiederum in viel größerer Allgemeinheit erhalten; im Allgemeinen wenigstens, obgleich in besondern Fällen auch hier wieder Ausnahmen statt finden können.

Beispiel 1. Setzt man in dem Beispiel zu der vorstehenden (N. III.) y^0 oder 1 statt $\varphi_{y'}$ also $\partial\varphi_y = 0$, so erhält man aus dem System (C) die Werthe

1) $$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad z = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot \sqrt{3}},$$

welche die gegebene Differenzialgleichung

2) $$\partial z - x \cdot y^2 \cdot \partial y - x^2 \cdot y \cdot \partial x = 0$$

identisch machen. — Setzt man aber in diese Differenzialgleichung (2.) zuerst den Werth für y, nämlich $\frac{x}{\sqrt{3}}$ aus (1.), und integrirt man dann die entstehende Gleichung

3) $$\partial z_x = \frac{4x^3}{3\cdot\sqrt{3}},$$

so erhält man

4) $$z = \frac{x^4}{3\cdot\sqrt{3}} + c.$$

Von diesem Werth von z, welcher in Verbindung mit dem Werth für y aus (1.), der Differenzialgleichung (2.) ebenfalls genügt, ist aber der obige Werth von z in (1.) bloß der besondere Fall, wo $c = 1$ genommen wird.

Hätte man dagegen $\varphi_y = b$, $\partial\varphi_y = 0$ genommen, so hätte man (aus (C der N. IV.) das Paar genügender Werthe

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad z = b + \frac{x^4}{3\cdot\sqrt{3}}$$

erhalten, und dieses Resultat, wenn b willkührlich ist, hat dieselbe Allgemeinheit wieder als das in (4.) erhaltene. — Diese letztere Ausnahme ist aber nur dem Umstand zuzuschreiben, daß die erstere der Gleichungen (C) dasmal zufällig gar kein z enthält, also y liefert, ohne daß der Ausdruck für y, mithin auch ohne daß die Gleichung (3.) die Konstante b in sich aufnimmt.

Beispiel 2. Setzt man im Beispiel zur (Nr. III.) $b\cdot z$ statt $\varphi''_{z'}$ also b statt $\partial\varphi''_{z'}$ so erhält man aus (C_2) daselbst

$$y = \frac{2}{bx} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{b}\cdot\left(x^2 + \frac{4}{b^2\cdot x^2}\right)$$

als Werthe, welche der gegebenen Differenzialgleichung

$$\partial z - x\cdot y^2\cdot\partial y - x^2\cdot y\cdot\partial x = 0$$

genügen. — Substituirt man aber in letztere direkt $\frac{2}{bx}$ statt y, und integrirt man die entstehende Gleichung, so erhält man

$$z = \frac{4}{b^3\cdot x^2} + \frac{x^2}{b} + c$$

dazu, welcher den ersten Werth von z (für $c = 0$) in sich schließt.

Beispiel 3. Setzt man in demselben Beispiel zu (N. III.)

1) $z = \frac{1}{3}C\cdot x^3 + B$, also $\partial z_x = C\cdot x^2$

in die gegebene Differenzialgleichung

2) $$\partial z_x - x \cdot y^2 \cdot \partial y_x - x^2 \cdot y = 0$$

statt z und ∂z_x, und integrirt man die entstehende Gleichung

3) $$\partial x_y = \frac{y^2}{C-y},$$

so erhält man

4) $$x^2 + y^2 + 2Cy + 2C^2 \cdot log\,(C-y) + c_1 = 0,$$

wo c_1 die neue willkührliche Konstante ist. — Diese beiden Werthe von z und y aus (1. und 4.) genügen also ebenfalls der gegebenen Differenzialgleichung (2.), eben so wie die aus dem Systeme (⊙) der (N. III.) gezogenen Werthe

5) $$z = \tfrac{1}{3}C \cdot x^3 + B \quad \text{und} \quad y = C.$$

Obgleich nun aber dieser letztere Werth von z genau der oben in (1.) angenommene ist, so ist doch der in (5.) zugehörige Werth $y = C$ für keinen Werth der Konstante c_1 in dem Werthe von y aus (4.) enthalten, sondern $y = C$ ist bloß ein singulärer Werth derselben Differenzialgleichung (3.), deren allgemeines Integral in (4.) ausgedrückt sich findet.

V. Euler, durch die unvollkommene Ansicht der Differenzialgleichungen, welche aus der Zuziehung des unendlich Kleinen hervorgehen mußte, getäuscht, meint in seinem (Calc. integr. T. III.), daß die Gleichungen

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0,$$

so oft sie nicht ein allgemeines Integral haben, d. h. so oft sie nicht der Bedingungsgleichung der Integrabilität genügen, absurd und völlig bedeutungslos seyen. Monge jedoch in den Pariser Memoiren vom Jahre 1784 hat zuerst das hier im (§. 410.) gegebene Resultat hingestellt; dieses System (C) des (§. 410.) dagegen ein kompletes Integral genannt. Gegen diese letztere Benennung, obgleich sie selbst von Lagrange beibehalten sich findet, muß jedoch protestirt werden, wie in (IV.) geschehen ist.

VI. Führt man in die Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

statt der Veränderlichen x, y und z neue Veränderliche u, v, w ein mittelst der Gleichungen

$$F_{x,y,z} = u, \quad F'_{x,y,z} = v, \quad F''_{x,y,z} = w,$$

in denen F, F′, F″ ganz beliebig gegebene Funktionen von x, y und z vorstellen, so verwandelt sich dadurch die gegebene Differenzialgleichung in eine andere von der Form

$$U \cdot \partial u + V \cdot \partial v + W \cdot \partial w = 0,$$

wo U, V, W Funktionen der 3 Veränderlichen u, v, w sind. Diese letztere kann dann auf demselben Wege behandelt werden, so daß man wieder 6 Systeme zweier Urgleichungen findet, welche ihr, also auch der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

genügen, von denen 3 Systeme willkührliche Funktionen von u oder von v oder von w, d. h. von $F_{x,y,z}$ oder von $F'_{x,y,z}$ oder von $F''_{x,y,z}$ in sich aufgenommen haben.

VII. Statt 3 neue Veränderliche auf einmal einzuführen, kann man auch deren nur zwei oder gar nur einen einzigen einführen.

VIII. Und so kann man also der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

durch ein System zweier Urgleichungen genügen, welches eine willkührliche Funktion von einer bestimmt gegebenen Funktion $F_{x,y,z}$ in sich aufnimmt.

IX. Aber zu gleicher Zeit geht aus den vorstehenden Nummern (VI.—VIII.) mit Nothwendigkeit hervor, daß man der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0,$$

wenn sie nicht durch eine einzige Urgleichung $f_{x,y,z} = c$ identisch werden kann (d. h. wenn sie den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt), doch allemal durch unendlich viele Paare von Urgleichungen genügen kann, deren jedes eine willkührliche Funktion in sich aufnimmt.

§. 412.

Wollte man einen weiteren Versuch anstellen, der gegebenen Differenzialgleichung

1) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x=0$$

allgemeiner noch zu genügen, als dies durch die in den (§. §. 410. und 411.) hingestellten Systeme zweier Ur-Gleichungen geschehen ist, so könnte dies vielleicht dadurch geschehen, daß man die gegebene Gleichung auf eine andere einfachere von der Form

2) $$A\cdot\partial a+B\cdot\partial b=0$$

reduzirte, in welcher A und B bloß Funktionen von a und b wären, so daß die allgemeine Integration der (2.) allemal als möglich vorausgesetzt werden muß, weil die Gleichung (2.) bloß zwei Veränderliche a und b enthält und, in der Form

$$A+B\cdot\partial b_a=0$$

gedacht, noch die Ableitung von b nach a.

Man müßte zu dem Ende in (1.) statt der Veränderlichen x und y zwei neue Veränderliche a und b einführen, durch die Gleichungen

3) $y=y_{z,a,b}$ und 4) $x=x_{z,a,b}$,

in welchen die durch y und x bezeichneten Funktionen von z, a und b anfänglich ganz unbestimmt gelassen, nachgehends aber so bestimmt werden könnten, daß aus der neuen Gleichung eben so gut z als ∂z herausfiele, wodurch sie die Form (2.) annehmen müßte.

Setzen wir nun diese Untersuchung fort, so erhalten wir aus den Gleichungen (3. und 4.)

5) $$\partial y=\partial y_z\cdot\partial z+\partial y_a\cdot\partial a+\partial y_b\cdot\partial b,$$

6) $$\partial x=\partial x_z\cdot\partial z+\partial x_a\cdot\partial a+\partial x_b\cdot\partial b,$$

und substituiren wir diese Werthe in die gegebene Differenzialgleichung (1.), so geht solche dadurch über in folgende

7) $$(Z+Y\cdot\partial y_z+X\cdot\partial x_z)\cdot\partial z$$
$$+(Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial x_a)\cdot\partial a+(Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial x_b)\cdot\partial b=0;$$

und diese reduzirt sich sogleich auf

8) $(Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a) \cdot \partial z + (Y \cdot \partial y_b + X \cdot \partial x_b) \cdot \partial b = 0,$

wenn man die y und x der Bedingung unterwirft, daß sie der Gleichung

I. $Z + Y \cdot \partial y_z + X \cdot \partial x_z = 0$

genügen, wobei man jedoch nicht vergessen darf, daß jetzt überall in X, Y und Z unter x und y diese neuen Funktionen x und y verstanden werden müssen. — Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Koeffizienten der Gleichung (8.), nämlich

9) $Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a$ durch K_1

und

10) $Y \cdot \partial y_b + X \cdot \partial x_b$ durch K_2;

so kann man die Gleichung (8.) auf die Form

11) $$\partial a + \frac{K_2}{K_1} \cdot \partial b = 0$$

bringen, und damit sie, d. h. $\frac{K_2}{K_1}$ d. h. $log\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$ d. h. $log K_2 - log K_1$ kein z mehr enthalte, darf man nur die y und x noch der Bedingung unterwerfen, daß sie der Gleichung

II. $$\partial(log K_2 - log K_1)_z = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial(K_1)_{(z)}}{K_1} = \frac{\partial(K_2)_{(z)}}{K_2}$$

genügen. — Damit also die gegebene Differenzialgleichung (1.) auf die andere (8.) sich reduziren lasse, und damit diese (8.) auch kein z mehr enthalte, also die Form (2.) annehme, hat man nur die unbekannten Funktionen y und x in (3. und 4.) so zu finden, daß sie den beiden Gleichungen

I. $Z + Y \cdot \partial y_z + X \cdot \partial x_z = 0$

und

II. $$\frac{\partial(Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a)_{(x)}}{Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a} = \frac{\partial(Y \cdot \partial y_b + X \cdot \partial x_b)_{(z)}}{Y \cdot \partial y_b + X \cdot \partial x_b}$$

genügen, in welchen Gleichungen unter Z, Y, X zwar die obigen Funktionen von x, y und z verstanden sind, aber unter der Vor-

aussetzung, daß statt y und x die gesuchten Funktionen y und x gesetzt worden, oder gesetzt gedacht sind.

Weil aber die Gleichung (II.) Ableitungen von y und x nach z, nach a und nach b enthält, also eine Parzialgleichung ist, so können wir nur versuchen, ob diesen Gleichungen (I. und II.) nicht unabhängig von ∂y_a, ∂y_b, ∂x_a und ∂x_b zu genügen ist durch Gleichungen, die bloß y, x und die Ableitungen von y und x nach z enthalten, mithin als totale Differenzialgleichungen nach (§. 281. d. V. Th. d. S.) integrirt werden können.

Um nun der Gleichung (II.) unabhängig von den Ableitungen ∂y_a, ∂y_b, ∂x_a, ∂x_b zu genügen, bleibt, wie die bloße Ansicht der Gleichung (II.) lehrt, nichts anders übrig, als die Zähler dieser Gleichung beziehlich auf die Form

$$Y' \cdot \partial y_a + X' \cdot \partial x_a \quad \text{und} \quad Y' \cdot \partial y_b + X' \cdot \partial x_b$$

zu bringen, und nachgehends $\frac{Y'}{Y} = \frac{X'}{X}$ zu nehmen.

Zu dem Ende bedenkt man, daß man hat

12) $$\partial(Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a)_{(z)} = \partial Y_{(z)} \cdot \partial y_a + \partial X_{(z)} \cdot \partial x_a + Y \cdot \partial(\partial y_z)_a + X \cdot \partial(\partial x_z)_a,$$

und daraus wird wiederum, weil

$$Y \cdot \partial(\partial y_z)_a = \partial(Y \cdot \partial y_z)_{(a)} - \partial Y_{(a)} \cdot \partial y_z, \text{ u. s. f. ist,}$$

13) $$\partial(Y \cdot \partial y_a + X \cdot \partial x_a)_{(z)} = \partial Y_{(z)} \cdot \partial y_a + \partial X_{(z)} \cdot \partial x_a - \partial Y_{(a)} \cdot \partial y_z - \partial X_{(a)} \cdot \partial x_z + \partial(Y \cdot \partial y_z + X \cdot \partial x_z)_{(a)}.$$

Und weil der letzte Theil dieser Gleichung (13.) wegen der Gleichung (I.) nichts anders als $-\partial Z_{(a)}$, so wie wiederum

14) $$\partial Z_{(a)} = \partial Z_y \cdot \partial y_a + \partial Z_x \cdot \partial x_a,$$

15) $$\partial Y_{(a)} = \partial Y_y \cdot \partial y_a + \partial Y_x \cdot \partial x_a,$$

16) $$\partial X_{(a)} = \partial X_y \cdot \partial y_a + \partial X_x \cdot \partial x_a,$$

und auch

17) $$\partial Y_{(z)} = \partial Y_z + \partial Y_y \cdot \partial y_z + \partial Y_x \cdot \partial x_z,$$

18) $$\partial X_{(x)} = \partial X_z + \partial X_y \cdot \partial y_z + \partial X_x \cdot \partial x_z$$

ist, in so ferne überall unter y und x die Funktionen y und x

aus (3. und 4.) gedacht werden müssen, so geht die Gleichung (13.) über in folgende:

19) $$\partial(Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial x_a)_{(z)} = Y'\cdot\partial y_a+X'\cdot\partial x_a,$$

wenn der Kürze wegen

20) $\partial Y_z-\partial Z_y+(\partial Y_x-\partial X_y)\cdot\partial\xi_z$ durch Y'

und

21) $\partial X_z-\partial Z_x+(\partial X_y-\partial Y_x)\cdot\partial y_z$ durch X'

bezeichnet wird.

Auf demselben Wege findet man aber auch

22) $$\partial(Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial x_b)_{(z)} = Y'\cdot\partial y_b+X'\cdot\partial x_b.$$

Dadurch geht nun die Gleichung (II.) über in

23) $$\frac{Y'\cdot\partial y_a+X'\cdot\partial x_a}{Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial x_a} = \frac{Y'\cdot\partial y_b+X'\cdot\partial x_b}{Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial x_b},$$

und dieser Gleichung (23.) wird offenbar durch die Annahme

24) $$\frac{Y'}{Y} = \frac{X'}{X} \quad \text{oder} \quad X\cdot Y'-Y\cdot X' = 0$$

genügt. — Setzt man hier statt X' und Y' ihre Werthe aus (20. und 21.), so erhält man statt der Gleichungen (I. und II.) jetzt diese beiden, nämlich

I. $$Z+Y\cdot\partial y_z+X\cdot\partial x_z = 0$$

und

III. $$X\cdot(\partial Y_z-\partial Z_y)+Y\cdot(\partial Z_x-\partial X_z)+Y\cdot(\partial Y_x-\partial X_y)\cdot\partial y_z + X\cdot(\partial Y_x-\partial X_y)\cdot\partial x_z = 0,$$

aus denen nun die Funktionen y und x (nach §. 281. d. V. Th. d. S.) gefunden werden sollen, während dann a, b als zwei willkührliche Konstanten eingehen müßten.

Verfährt man aber nach den angeführten (§. 281. oder Anmerkg. 1. zu §. 282. d. V. Th. d. S.), und eliminirt man zunächst aus diesen Gleichungen (I. und III.) die Ableitung ∂x_z; so fällt ∂y_z von selbst mit fort, und man erhält die Gleichung

$(\odot)\cdots$ $$X\cdot(\partial Y_z-\partial Z_y)+Y\cdot(\partial Z_x-\partial X_z)+Z\cdot(\partial X_y-\partial Y_x) = 0$$

zwischen den gegebenen Koeffizienten X, Y und Z.

Ist also diese Bedingungsgleichung (⊙) von den Koeffizienten der gegebenen Differenzialgleichung

1) $$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

nicht erfüllt, so enthalten die beiden Gleichungen (I. und III.) einen Widerspruch, und die gesuchte Reduktion der Gleichung (1.) auf diese Form

2) $$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$$

zeigt sich daher als unmöglich. Ist aber diese Bedingungsgleichung (⊙) erfüllt, so erfüllt die Gleichung (I.) bereits die (II.), beiden Gleichungen kann auf unendlich viele Weise durch zusammengehörige Werthe von y und x genügt werden; die (1.) reduzirt sich daher auf unendlich viele Arten auf die Form (2.), und giebt dann allemal ein Integral von der Form

$$\psi_{a,b} = C,$$

wo a und b die aus den Gleichungen (3. und 4.), nämlich aus

3) $y = y_{z,a,b}$ und 4) $x = x_{z,a,b}$,

für a und b hervorgehenden Funktionen von x, y und z sind, während C eine willkührliche Konstante ist.

Beispiel. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\partial z + x \cdot \partial y + y \cdot \partial x = 0,$$

so hat man $Z = 1$, $Y = x$, $X = y$, und die Bedingungsgleichung (⊙) ist daher dasmal erfüllt. Mithin hat man jetzt zur Bestimmung der Funktionen $x_{z,a,b}$ und $y_{z,a,b}$ nur die einzige Gleichung (I.), welche jetzt folgende wird, nämlich

I. $$1 + x \cdot \partial y_z + y \cdot \partial x_z = 0.$$

Nimmt man nun nach Belieben

$$x = x = a + z,$$

so liefert diese Gleichung (I.) sogleich

$$y = y = \frac{b - z}{a + z}$$

dazu. Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen a und b, statt der andern x und y, mittelst der Gleichungen

$$x = a+z \quad \text{und} \quad y = \frac{b-z}{a+z}$$

geht aber die gegebene Differenzialgleichung

$$\partial z + x\cdot\partial y + y\cdot\partial x = 0 \quad \text{bloß in} \quad \partial b = 0$$

über, und giebt daher

$$b = C$$

zum allgemeinen Integral, während

$$a = x-z \quad \text{und} \quad b = xy+z$$

wird, so daß $b = C$ wiederum in

$$xy+z = C$$

übergeht, und diese Gleichung ist nun das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Hätte man, da x nach Belieben genommen werden konnte,

$$x = \xi = az$$

genommen, so hätte man aus der (I.)

$$y = \eta = \frac{b}{z} - \frac{1}{a}$$

dazu erhalten, so daß

$$a = \frac{x}{z}, \qquad b = yz + \frac{z^2}{x}$$

geworden wäre. Durch Einführung dieser Veränderlichen a und b, statt der x und y, wäre aber die gegebene Differenzialgleichung

$$\partial z + x\cdot\partial y + y\cdot\partial x = 0 \quad \text{bloß in} \quad b\cdot\partial a + a\cdot\partial b = 0$$

übergegangen, und hätte

$$ab = C \quad \text{oder} \quad \frac{x}{z}\cdot\left(yz + \frac{z^2}{x}\right) = C \quad \text{d. h.} \quad xy+z = C$$

zum allgemeinen Integral geliefert; genau dasselbe wie vorher.

Anmerkg. 1. Betrachtet man aber die Bedingungsgleichung (⊙) etwas näher, so findet man leicht, daß sie diejenige Bedingungsgleichung ist, welche nach (§. 396. und §. 402.) für den Fall gefunden wird, daß die gegebene Differenzialgleichung

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0$$

einen integrirenden Faktor ξ haben, oder welche auch gefunden wird, wenn dieselbe Gleichung integrabel seyn soll.

Anmerkg. 2. Da übrigens in dem (§. 412.) die Gleichung (⊙) nur statt finden muß, wenn unter x und y die gesuchten Funktionen x und y verstanden werden, so brauchte die Gleichung (⊙) nicht identisch auf die Form $0 = 0$ sich zu reduziren, sondern man könnte im Gegentheil diese Gleichung (⊙) als eine Gleichung zwischen x, y und z mit der Gleichung (I.) in Verbindung bringen, und y und ξ so bestimmt zu haben, daß die Reduktion der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

auf die Form

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$$

möglich wird. Allein da die Gleichung (⊙) eine Urgleichung ist, welche keine willkührliche Konstante einführt, die als neuer Veränderlicher betrachtet werden könnte, so spricht sie nun eine Abhängigkeit zwischen x, y und z aus, welche zu der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

noch hinzugetreten ist. Vermöge dieser Abhängigkeit also allein, und nicht im Allgemeinen, reduzirt sich nun die gegebene Differenzialgleichung auf die einfachere Form $A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$. — Man hätte also nun wieder, wenn auch die letztere Gleichung

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$$

allgemein integrirt wird, ein System zweier Urgleichungen, welches der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

genügt. *)

---

*) Es kann sich aber treffen, daß beiden Gleichungen durch eine einzige genügt werden kann, wie etwa in dem Beispiel

1) $\partial z \cdot \sqrt{x^2+y^3} - \frac{3}{2}\partial y \cdot \sqrt[3]{(z^2-x^2)^2} - x \cdot \partial x = 0.$

Die Bedingungsgleichung der Integrabilität wird hier

2) $2z + \frac{3}{2}y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2-x^2} - 2(x^2+y^3) - \frac{3}{2}(z^2-x^2) = 0,$

und diesen beiden Gleichungen genügt der Werth

$$z = \sqrt{x^2+y^3}.$$

Dasselbe findet man aber bereits im (§. 404.) weit gründlicher besprochen.

B. Wenn die gegebene Gleichung vier Veränderliche enthält, also von der Form

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

ist.

§. 413.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0,$$

wo Z, Y, X und W gegebene Funktionen von den 4 Veränderlichen x, y, z und w vorstellen. Da drängt sich uns zunächst folgendes auf:

I. Sind von den 4 Bedingungsgleichungen

1) $Z\cdot(\partial Y_x - \partial X_y) + Y\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0$
2) $Z\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_z - \partial Z_w) + W\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0$
3) $Z\cdot(\partial X_w - \partial W_x) + X\cdot(\partial W_z - \partial Z_w) + W\cdot(\partial Z_x - \partial X_z) = 0$
4) $Y\cdot(\partial X_w - \partial W_x) + X\cdot(\partial W_y - \partial Y_w) + W\cdot(\partial Y_x - \partial X_y) = 0$

irgend drei erfüllt, so ist die vierte allemal nothwendig mit erfüllt. Die gegebene Gleichung

5) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

ist dann integrabel, d. h. es giebt dann eine einzige Urgleichung

6) $$f_{z,y,x,w} = c$$

mit einer willkührlichen Konstante c, welche ihr genügt, und welche zugleich ihr allgemeines Integral ist. — Dieses Integral bestimmt eine der 4 Veränderlichen durch die 3 übrigen, so daß die 3 übrigen von einander ganz unabhängig bleiben, also daß man sich alle drei als völlig willkührliche Funktionen von t, oder zwei derselben als völlig willkührliche Funktionen der 3ten denken kann. (Vgl. §. 407.).

Dabei drückt die Gleichung (1.) aus, daß die Gleichung

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0,$$

welche aus der gegebenen (5.) hervorgeht, indem man $\partial w = 0$ und w konstant sich denkt, integrabel ist. (Vgl. §. 396. und

§. 402.). — Aber eben so drückt jede der 3 übrigen Gleichungen (2. 3 und 4.) aus, daß die Gleichung (5.) allemal in eine integrable Gleichung übergeht, so oft beziehlich ∂x, oder ∂y, oder ∂z der Null gleich gesetzt, und x, y oder z konstant gedacht werden.

II. Sind dagegen von den 4 Bedingungsgleichungen (I. 1—4.) nicht drei erfüllt, sondern nur zwei oder gar nur eine einzige derselben, etwa nur die (I. 1.) allein, ist also z. B. bloß erfüllt die Gleichung

$$1)\quad Z\cdot(\partial Y_x - \partial Y_x) + Y\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_y - \partial Y_z) = 0,$$

so ist die gegebene Differenzialgleichung

$$2)\quad Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

für den Fall integrabel, daß $\partial w = 0$ und w konstant gedacht wird, d. h. es ist dann die Gleichung

$$3)\quad Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x = 0$$

integrabel, indem w als konstant angesehen wird.

Integrirt man nun diese Gleichung (3.) mittelst eines integrirenden Faktors ξ, welcher z, y und x, aber auch die Konstante w in sich aufgenommen haben kann, und ist

$$4)\quad f_{z,y,x,w} = \psi_w$$

das Integral derselben, (wo ψ_w die willkührliche Konstante vorstellt), so daß man hat

$$5)\ \partial f_z = \xi\cdot Z,\quad 6)\ \partial f_y = \xi\cdot Y \text{ und } 7)\ \partial f_x = \xi\cdot X,$$

und nimmt man diese Relation (4.) noch als eine beliebig gewählte Abhängigkeit zwischen z, y, x und w an; so erhält man nun aus den beiden Gleichungen (2. und 4.), wenn man ∂z eliminirt, auf eine dem Verfahren des (§. 410.) ganz analoge Weise die Gleichung

$$8)\quad (\partial f_w - \xi\cdot W - \partial\psi_w)\cdot\partial w = 0,$$

und diese giebt entweder

$$9)\quad \partial w = 0,\ \text{also}\ w = c,$$

oder

10) $$\partial f_w - \xi \cdot W = \partial \psi_w.$$

Das System zweier Urgleichungen

(⊙)··· $$f_{z,y,x,w} = \psi_w \quad \text{und} \quad w = c,$$

aber auch das System der beiden Urgleichungen

(ℂ)··· $$f_{z,y,x,w} = \psi_w \quad \text{und} \quad \partial f_w - \xi \cdot W = \partial \psi_w$$ *)

mit der willkührlichen Funktion des einzigen Veränderlichen w, genügt also dann der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0.$$

Und ist auffer der Bedingungsgleichung (1.) noch eine 2te der Bedingungsgleichungen (I. 1—4.) erfüllt, etwa noch die Gleichung (I. 2.), so daß nun auch

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + W \cdot \partial w = 0$$

---

*) Fällt, analog wie im (§. 411. N. I.), aus $\partial f_w - \xi \cdot W$ zufällig x, y und auch z von selbst weg, ist also

1) $\partial(\partial f_w - \xi \cdot W)_x = 0$, $\partial(\partial f_w - \xi \cdot W)_y = 0$ und $\partial(\partial f_w - \xi \cdot W)_z = 0$;

so dient die Gleichung

$$\partial f_w - \xi \cdot W = \partial \psi_w$$

zur Bestimmung von ψ_w, und man erhält dann als Integral der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0,$$

die folgende Gleichung

$$f_{z,y,x,w} = \int (\partial f_w - \xi \cdot W) \cdot dw.$$

Die 3 Gleichungen (1.) in Verbindung mit den 3 Gleichungen

2) $\partial(\xi \cdot Z)_y - \partial(\xi \cdot Y)_z = 0$; $\partial(\xi \cdot Z)_x - \partial(\xi \cdot X)_z = 0$

und $$\partial(\xi \cdot Y)_x - \partial(\xi \cdot X)_y = 0,$$

welche erfüllt seyn müssen wegen der hier oben in (II.) gemachten Voraussetzung, bilden wiederum die 6 Gleichungen, welche bereits im (§. 407. IV.) gefunden worden sind, theils zur Bestimmung des jetzigen integrirenden Faktors, theils um die Bedingungen der Integrabilität zu liefern.

integrabel ist, während x konstant gedacht wird, so erhält man noch zwei andere Systeme zweier Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w = 0$$

genügen, während in dem einen dieser Systeme, x einer Konstante gleich ist, in dem andern aber eine willkührliche Funktion von x vorkommt.

III. Ist aber gar keine der Bedingungsgleichungen (I. 1—4.) erfüllt, so denke man sich zunächst $\partial w = 0$ und $\partial x = 0$, also w und x als konstant, und integrire in diesem Sinne die gegebene Differenzialgleichung

1) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w = 0$$

d. h. die Gleichung

2) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y = 0$$

mittelst des integrirenden Faktors M, welcher auser den beiden Veränderlichen z und y auch die beiden Konstanten x und w in sich aufgenommen haben kann; und es sey

3) $$f_{z,y,x,w} = \varphi_{x,w}$$

das Integral hiervon (wo $\varphi_{x,w}$ die willkührliche Konstante vorstellt), so daß man hat

4) $\partial f_z = M\cdot Z$ und 5) $\partial f_y = M\cdot Y$,

während $\varphi_{x,w}$ als eine willkührliche Funktion von x und w angesehen wird.

Nimmt man nun diese Gleichung (3.) als die erste Relation zwischen z, y, x und w an, so hat man die 2 Gleichungen (1. und 3.), aus denen nun z und ∂z eliminirt werden kann. Differenziirt man zu dem Ende die (3.), so erhält man

$$\partial f_z\cdot\partial z+\partial f_y\cdot\partial y+\partial f_x\cdot\partial x+\partial f_w\cdot\partial w = \partial\varphi_x\cdot\partial x+\partial\varphi_w\cdot\partial w$$

oder nach (5. und 4.)

6) $$M\cdot Z\cdot\partial z+M\cdot Y\cdot\partial y+\partial f_x\cdot\partial x+\partial f_w\cdot\partial w = \partial\varphi_x\cdot\partial x+\partial\varphi_w\cdot\partial w.$$

Eliminirt man nun aus (1. und 6.) die Ableitung ∂z, indem man

die (1.) mit M multiplizirt, und von der (6.) subtrahirt, so fällt ∂y ebenfalls mit weg, und es ergiebt sich

7) $(\partial f_x - M \cdot X - \partial \varphi_x) \cdot \partial x + (\partial f_w - M \cdot W - \partial \varphi_w) \cdot \partial w = 0.$

Dieser Gleichung wird nun genügt durch

8) $\partial x = 0$ d. h. $x = c$ und 9) $\partial w = 0$ d. h. $w = c_1$,

aber auch durch

10) $\partial f_x - M \cdot X - \partial \varphi_x = 0$ und 11) $\partial f_w - M \cdot W - \partial \varphi_w = 0$,

und auch noch durch das System (8.) und (11.), so wie noch durch das System (10.) und (9.).

Das System der drei Gleichungen (3. 8 und 9.), aber auch das System der 3 Gleichungen (3. 10. und 11.), so wie noch zwei andere Systeme 3er Urgleichungen, nämlich das System (2. 8. und 11.) und das System (3. 9. 10.), genügen nun der gegebenen Differenzialgleichung (1.), während $\varphi_{x,w}$ eine ganz willkührliche Funktion von x und w ist, so daß die 3 letztere Systeme unendlich viele zusammengehörige Funktionen

$$z = z_w, \quad y = y_w \quad \text{und} \quad x = x_w$$

liefern, welche der Gleichung (1.) genügen, nach den unendlich vielen verschiedenen Formen, die statt $\varphi_{x,w}$ nach und nach gesetzt werden können.

Weil aber von der gegebenen Differenzialgleichung je zwei der vier Veränderlichen als konstant angesehen werden können, so erhält man auf diesem Wege zunächst 6 mal 4 Systeme dreier Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

In so ferne jedoch neue Veränderliche eingeführt werden können, wie im (§. 411. N. N. VI.—VIII.) zu sehen ist, so erstreckt sich die Anzahl der so zu findenden Systeme dreier genügenden Urgleichungen, welche noch eine willkührliche Funktion zweier Veränderlichen enthalten (während diese letztern selber wieder Funktionen von z, y, x und w seyn können) bis in's Unendliche. *)

---

*) Dies letztere gilt nicht von dem Fall (II.), welcher nur ein einziges genügendes System zweier Urgleichungen liefert, wenn nur eine

Anmerkung 1. Dasselbe Resultat der (Nr. III.) ergiebt sich noch einmal, wenn man anfänglich in der Gleichung

1) $Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w=0$

nur einen einzigen der Veränderlichen z. B. w als konstant ansieht, $\partial w=0$ setzt, und für die so entstehende Gleichung

2) $Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x=0$

ein System zweier Urgleichungen von der Form

3) $f_{z,y,x,w}=\varphi_{x,w}$ und 4) $F_{z,y,x,w}=\partial\varphi_x$

(nach §. 410.) findet, wo

5) $\partial f_z=M\cdot Z$, 6) $\partial f_y=M\cdot Y$ und 6) $F=\partial f_x-M\cdot X$

ist, und wobei f und F auch die Konstante w in sich aufgenommen haben werden, während die willkührliche Funktion φ_x ebenfalls die Konstante w in sich aufgenommen haben kann.

Nimmt man nun diese Gleichungen (3. und 4.) als zwei willkührlich angenommene Abhängigkeiten zwischen z, y, x und w zu der gegebenen Differenzialgleichung (1.) noch hinzu, so hat man zur Bestimmung dreier der 4 Veränderlichen z, y, x und w als Funktionen der 4ten die 3 Gleichungen (1. 3. und 4.). Behandelt man daher diese letztern 3 Gleichungen nach Vorschrift der (§. §. 281. und 282. des V. Th. d. S.), so erhält man zunächst als Differenzial der (3.)

$$\partial f_z\cdot\partial z+\partial f_y\cdot\partial y+\partial f_x\cdot\partial x+\partial f_w\cdot\partial w=\partial\varphi_x\cdot\partial x+\partial\varphi_w\cdot\partial w.$$

Setzt man hier statt ∂f_z, ∂f_y beziehlich ihre Werthe $M\cdot Z$, $M\cdot Y$, so wie statt ∂f_x seinen Werth aus (4. und 7.) nämlich $\partial\varphi_x+M\cdot X$; multiplizirt man endlich die (1.) mit M, und subtrahirt man letztere von der vorher erhaltenen, um ∂z zu eliminiren: so fällt ∂y, so wie ∂x von selbst mit fort, so daß sich ergiebt

8) $(\partial f_w-M\cdot W-\partial\varphi_w)\cdot\partial w=0$,

---

einzige der Bedingungsgleichungen (1—4.) erfüllt ist, und nur zwei solche Systeme zweier Urgleichungen finden läßt, wenn zwei jener Gleichungen (1.—4.) erfüllt sind.

also entweder

9) $\partial w = 0$ oder 10) $\partial f_w - M \cdot W = \partial \varphi_{w'}$

und so erhält man wieder dasselbe System der 3 Urgleichungen wie in (Nr. III.) selbst.

Anmerkung 2. Paoli hat aber gezeigt, wie das der Differenzialgleichung

1) $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0$

genügende System 3er Urgleichungen in (Nr. III.), nämlich

2) $f_{z,y,x,w} = \varphi_{x,w}$; 3) $\partial f_x - M \cdot X = \partial \varphi_x$;

4) $\partial f_w - M \cdot W = \partial \varphi_{w'}$

welches eine willkührliche Funktion $\varphi_{x,w}$ zweier Veränderlichen enthält, auf ein System von nur zwei Urgleichungen zurückgebracht werden könne, welches eine willkührliche Funktion eines einzigen Veränderlichen ω in sich schließt. — Eliminirt man nämlich aus den 3 Gleichungen (2.—4.) sowohl z als auch y, so erhält man eine Parzialgleichung zwischen x, w, φ und $\partial \varphi_x$, $\partial \varphi_w$. Wird diese integrirt, so ergiebt sich nach (§§. 283.—287. d. V. Th. d. S.) eine Gleichung

5) $F_{x,w,\phi,\psi_\omega} = 0$

zwischen x, w, φ und einer willkührlichen Funktion ψ_ω eines Veränderlichen ω, welcher letztere eine bestimmte Funktion von x und w seyn wird, aber auch φ selbst in sich aufgenommen haben kann. — Von den 4 Gleichungen (2. 3. 4 und 5.) ist daher die 4te jedesmal eine nothwendige Folge der 3 übrigen. — Bestimmt man deshalb aus der Gleichung (5.) die Funktion φ, und setzt man diesen Werth statt φ in zwei der Gleichungen (2.—4.); so hat man zwei Urgleichungen, mit der willkührlichen Funktion ψ_ω, welche der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0$$

genügen.

Beispiel. Ist z. B. gegeben die Differenzialgleichung

1) $$z \cdot \partial z + w \cdot \partial y + y \cdot \partial x + x \cdot \partial w = 0,$$

so erhält man, indem $\partial u = 0$ und $\partial x = 0$ gesetzt wird,

$$z \cdot \partial z + w \cdot \partial y = 0;$$

dieses integrirt, giebt

$$\tfrac{1}{2}z^2 + w \cdot y = \varphi_{x,w'}$$

so daß man

$$M = 1, \quad f_{z,y,x,w} = \tfrac{1}{2}z^2 + w \cdot y,$$

also $\partial f_x = 0$; $\partial f_w = y$; $M \cdot X = y$ und $M \cdot W = x$ hat. Der gegebenen Differenzialgleichung (1) wird also genügt durch das System der 3 Gleichungen

2) $$\tfrac{1}{2}z^2 + w \cdot y = \varphi_{x,w}; \quad -y = \partial\varphi_x; \quad y - x = \partial\varphi_w.$$

Eliminirt man nun aus diesen 3 Gleichungen sowohl z als auch y, d. h. aus den beiden letztern Gleichungen bloß y, so erhält man die Parzialgleichung

$$x + \partial\varphi_x + \partial\varphi_w = 0.$$

Integrirt man diese nach den (§. §. 286. 287. des V. Th. d. S.), so erhält man

3) $$\varphi_{x,w} = -\tfrac{1}{2}x^2 + \psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = w - x$$

ist. Substituirt man nun diesen Werth statt φ in die beiden erstern der obigen Gleichungen (3.), so erhält man das System der beiden Urgleichungen

4) $$\tfrac{1}{2}z^2 + w \cdot y + \tfrac{1}{2} \cdot x^2 = \psi_\omega \quad \text{und} \quad y - x = \partial\psi_\omega, \quad \text{wo} \quad \omega = w - x$$

ist; und dieses System genügt der gegebenen Differenzialgleichung (1.). *)

§. 414.

Will man aber für die Gleichung

---

*) Macht man in der gegebenen Gleichung (1.) gleich anfänglich $w = x + t$, so verwandelt sie sich in

$$z \cdot \partial z + (x + t) \cdot \partial y + (y + x) \cdot \partial x + x \cdot \partial t = 0.$$

Denkt man sich hier $\partial t = 0$ und t konstant, so wird sie integrabel, und es kann daher nach (§. 413. Nr. II.) das ihr genügende System der beiden Urgleichungen

$$x^2 + 2xy + z^2 + 2ty = \psi_t \quad \text{und} \quad 2y - 2x = \partial\psi_t$$

sogleich gefunden werden. Dies Resultat stimmt aber mit dem eben erhaltenen vollkommen überein, da die Funktion ψ ganz willkührlich ist, also auch 2ψ statt ψ geschrieben werden kann.

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

ein ihr genügendes System von nur zwei Urgleichungen finden (welches natürlich nur 2 der 4 Veränderlichen in die beiden übrigen ausdrückt, so daß die letztern beiden von einander ganz unabhängig, oder der eine davon eine ganz beliebige Funktion des andern bleibt), so scheint es ein viel direkteres Verfahren zu seyn, wenn man wiederum den im (§. 412.) bereits betretenen Weg versucht, um zu sehen, ob sich nicht die gegebene Gleichung

1) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

auf die einfachere

2) $$A\cdot\partial a + B\cdot\partial b + C\cdot\partial c = 0$$

reduziren lassen werde, in welcher letztern A, B, C bloß Funktionen von a, b, c seyn sollen.

Zu dem Ende führe man statt der 3 Veränderlichen y, x, w eben so viele neue Veränderliche a, b, c durch die Gleichungen

3) $y = y_{z,a,b,c}$; 4) $x = \xi_{z,a,b,c}$ und 5) $w = w_{z,a,b,c}$

ein, lasse die Funktionen y, ξ, w anfänglich ganz unbestimmt, bestimme sie aber nachgehends wo möglich so, daß aus der neuen Gleichung, die aus (1.) hervorgeht, sowohl z als auch ∂z herausfällt.

Aus den Gleichungen (3.—5.) folgt aber

6) $$\partial y = \partial y_z\cdot\partial z + \partial y_a\cdot\partial a + \partial y_b\cdot\partial b + \partial y_c\cdot\partial c;$$

7) $$\partial x = \partial \xi_z\cdot\partial z + \partial \xi_a\cdot\partial a + \partial \xi_b\cdot\partial b + \partial \xi_c\cdot\partial c;$$

8) $$\partial w = \partial w_z\cdot\partial z + \partial w_a\cdot\partial a + \partial w_b\cdot\partial b + \partial w_c\cdot\partial c.$$

Denkt man sich nun in der gegebenen Differenzialgleichung (1.) unter y, x und w diese Funktionen y, ξ und w aus (3.—5.), so wie diese Werthe zur Rechten aus (6.—8.) beziehlich statt ∂y, ∂x und ∂w substituirt; so erhält man, wenn der Koeffizient von $\partial z = 0$ gesetzt wird,

I. $$Z + Y\cdot\partial y_z + X\cdot\partial \xi_z + W\cdot\partial w_z = 0,$$

und die gegebene Differenzialgleichung (1.) selbst geht dadurch über in

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l}(Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial\xi_a+W\cdot\partial w_a)\cdot\partial a\\ +(Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial\xi_b+W\cdot\partial w_b)\cdot\partial b\\ +(Y\cdot\partial y_c+X\cdot\partial\xi_c+W\cdot\partial w_c)\cdot\partial c\end{array}\right\}=0,$$

d. h. in

$$10)\quad A\cdot\partial a+B\cdot\partial b+C\cdot\partial c=0,$$

wenn

$$11)\quad \left\{\begin{array}{ll}Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial\xi_a+W\cdot\partial w_a & \text{durch } A\\ Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial\xi_b+W\cdot\partial w_b & \text{durch } B\\ Y\cdot\partial y_c+X\cdot\partial\xi_c+W\cdot\partial w_c & \text{durch } C\end{array}\right\}$$

bezeichnet werden.

Gerade so, wie im (§. 412.), folgt aber nun, daß diese Gleichung (9.) auch nicht z mehr enthält, sobald y, ξ und w so genommen werden, daß

$$\text{II.}\quad \frac{\partial(Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial\xi_a+W\cdot\partial w_a)_{(z)}}{Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial\xi_a+W\cdot\partial w_a}=\frac{\partial(Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial\xi_b+W\cdot\partial w_b)_{(z)}}{Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial\xi_b+W\cdot\partial w_b}=\frac{\partial(Y\cdot\partial y_c+X\cdot\partial\xi_c+W\cdot\partial w_c)_{(z)}}{Y\cdot\partial y_c+X\cdot\partial\xi_c+W\cdot\partial w_c}$$

wird.

Damit man aber dieser Gleichung (II.) wo möglich unabhängig von ∂y_a, ∂y_b, ∂y_c, $\partial\xi_a$, $\partial\xi_b$, $\partial\xi_c$, ∂w_a, ∂w_b und ∂w_c genügen könne, muß man die Zähler dieser Ausdrücke in (II.) so umformen, daß diese eben genannten Ableitungen bloß als Faktoren erscheinen. Verfährt man zu dem Ende ganz nach (§. 412.), so erhält man sogleich

$$12)\quad \left\{\begin{array}{l}\partial(Y\cdot\partial y_a+X\cdot\partial\xi_a+W\cdot\partial w_a)_{(z)}=Y'\cdot\partial y_a+X'\cdot\partial\xi_a+W'\cdot\partial w_a\\ \partial(Y\cdot\partial y_b+X\cdot\partial\xi_b+W\cdot\partial w_b)_{(z)}=Y'\cdot\partial y_b+X'\cdot\partial\xi_b+W'\cdot\partial w_b\\ \partial(Y\cdot\partial y_c+X\cdot\partial\xi_c+W\cdot\partial w_c)_{(z)}=Y'\cdot\partial y_c+X'\cdot\partial\xi_c+W'\cdot\partial w_c,\end{array}\right.$$

sobald nur der Kürze wegen

$$13)\quad \partial Y_z-\partial Z_y+(\partial Y_x-\partial X_y)\cdot\partial\xi_z+(\partial Y_w-\partial W_y)\cdot\partial w_z=Y'$$

$$14)\quad \partial X_z-\partial Z_x+(\partial X_y-\partial Y_x)\cdot\partial y_z+(\partial X_w-\partial W_x)\cdot\partial w_z=X'$$

$$15)\quad \partial W_z-\partial Z_w+(\partial W_y-\partial Y_w)\cdot\partial y_z+(\partial W_x-\partial X_w)\cdot\partial\xi_z=W'$$

gesetzt wird.

Subſtituirt man nun dieſe Werthe aus (12.) in die Gleichungen (II.), ſchafft man die Brüche weg und ordnet; ſo findet man, was auch ſchon bei dem bloßen Anblick der Form der Gleichungen (II.) in die Augen fällt, daß nämlich dieſen beiden Gleichungen (II.) genügt wird, wenn man

III. $$\frac{Y'}{Y} = \frac{X'}{X} = \frac{W'}{W}$$ hat.

Man hat alſo nun zur Beſtimmung der 3 Funktionen y, ξ und w (in 3.—5.) die Gleichung (I.) und die beiden Gleichungen (III.), welche außer den Funktionen Z, Y, X und W und ihren Ableitungen (in denen aber unter y, x und w die Funktionen y, ξ und w zu verſtehen ſind, oder vielmehr ſtatt y, x und w beziehlich y, ξ und w geſetzt worden ſind) nur noch die 3 Ableitungen ∂y_z, $\partial \xi_z$, ∂w_z vorkommen, ſo daß dieſe 3 Gleichungen totale Differenzialgleichungen ſind, in denen y, ξ und w nur als Funktionen von z erſcheinen. Dieſe laſſen ſich daher nach (§. 282. oder auch nach Anmerk. 1. zu §. 282. d. V. Th. d. S.) integriren, ſo daß man y, ξ und w in Z und in noch 3 willkührliche Konſtanten a, b, c ausgedrückt erhält.

Da nun dieſe letztern 3 Gleichungen, nämlich die (I.) und die beiden Gleichungen (II.) im Allgemeinen wenigſtens die 3 Ableitungen ∂y_z, $\partial \xi_z$ und ∂w_z, in y, ξ, w und z ausgedrückt, wirklich liefern, ſo iſt es alſo allemal möglich, die Gleichung

1) $$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0$$

auf die Form

2) $$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0$$

zurückzuführen, nämlich auf die Gleichung (9.), in welcher A, B, C bloß Funktionen von a, b, c ohne z ſind. Und weil dieſer letzteren Gleichung (2.), nach (§. 410.), durch das Syſtem der beiden Gleichungen

(⊙)··· $$f_{a,b,c} = \varphi_c \quad \text{und} \quad c = \text{Constante}$$

aber auch durch das Syſtem

(☾)··· $$f_{a,b,c} = \varphi_c \quad \text{und} \quad F_{a,b,c} = \partial\varphi_c$$

genügt wird, so genügen dieselben beiden Systeme zweier Urgleichungen auch der gegebenen Differenzialgleichung (1.), sobald nur statt a, b, c die aus den 3 Gleichungen (3.—5.) für sie hervorgehenden Funktionen von z, y, x und w gesetzt werden, während φ_c eine ganz willkührliche Funktion von c vorstellt.

Anmerkg. Indem wir die Bemerkungen übergehen, welche, ganz analog denen im (§. 411.) gemachten, auch hier zu beherzigen sind, können wir nicht umhin, über das hier zuletzt im (§. 414.) beschriebene Verfahren noch einiges hinzuzufügen.

I. Die Gleichung (§. 414. N. 9.), in welche die (§. 414. N. 1.) auch dann übergeht, wenn man die Funktionen y, x, w ganz willkührlich annimmt, aber z als konstant, also $\partial z = 0$ sich denkt, hat auch schon die Form

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0,$$

nur mit dem Unterschiede, daß A, B, C dann, außer a, b, c auch noch die Konstante z enthalten werden.

II. Da die Gleichungen (II. des §. 414.) mit Hilfe der Gleichung (I.) gebildet worden sind, so kann man die Form $A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0$, so lange z veränderlich gedacht ist, nur dadurch hervorbringen, daß man den Gleichungen (I. und II. des §. 414.) zu gleicher Zeit genügt.

III. Hat man die Gleichung

1) $$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0$$

durch das vorstehende Verfahren des (§. 414.) auf die Form

2) $$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0$$

reduzirt, so kann man nun dasselbe Verfahren, aber das des (§. 412.) anwenden, um diese letztere Gleichung (2.) auf die noch einfachere Form

3) $$A' \cdot \partial a' + B' \cdot \partial b' = 0$$

zu reduziren. Dieses ist nach (§. 412.) allemal möglich, so oft die Bedingungsgleichung

4) $C\cdot(\partial B_a - \partial A_b) + B\cdot(\partial A_c - \partial C_a) + A\cdot(\partial C_b - \partial B_c) = 0$

erfüllt ist, während diese letztere Gleichung (4.), wenn man statt A, B, C ihre Werthe aus (§. 414. N. 11.) substituirt, sich augenblicklich in die folgende umwandelt, nämlich in

5) $W\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) + X\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_x - \partial X_w) = 0.$

Und diese letztere Gleichung, wenn sie erfüllt ist, zeigt an, daß die Gleichung (1.), nämlich

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0,$$

für den Fall, daß $\partial z = 0$, also z konstant gedacht ist, einen integrirenden Faktor habe.

Man möchte daraus fast folgern, daß, wenn die einzige Gleichung (5.) erfüllt ist, die Gleichung

1) $Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$

nothwendig integrabel seyn müsse, weil sie sich dann auf die Form

2) $A'\cdot\partial a' + B'\cdot\partial b' = 0$

zu reduziren scheint, diese letztere aber allemal integrabel ist. Auf der andern Seite wissen wir aber aus (§. 407.), daß, damit die Gleichung (1.) integrabel sey, ausser der obigen Bedingungsgleichung (5.) noch 2 andere Bedigungsgleichungen erfüllt seyn müssen, nämlich die Bedingungsgleichungen für die Existenz eines integrirenden Faktors der Gleichung (1.), einmal in dem Falle, daß $\partial y = 0$, also y konstant, und dann auch in dem Falle, daß $\partial x = 0$, also x konstant gedacht wird. *)

Dieser scheinbare Widerspruch hebt sich aber sogleich, wenn man aus den Gleichungen (I. und II. des §. 414.) die Ableitun-

---

*) Existirt aber ein integrirender Faktor der Gleichung

(♂)... $Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$

für den Fall, daß $\partial z = 0$, und für den Fall, daß $\partial y = 0$, und auch noch für den Fall, daß $\partial x = 0$; so folgt aus den drei hiezu erforderlichen Bedingungsgleichungen allemal die vierte von selbst, nach welcher dieselbe Gleichung auch in dem Falle integrabel ist, daß $\partial w = 0$ gesetzt wird. Und dann ist die Gleichung (♂) selbst integrabel. (Vgl. §. 407. und §. 408.).

gen ∂y_z, ∂x_z und ∂w_z wirklich durch algebraische Auflösung findet. Es ergeben sich dann für ∂y_z, ∂x_z, ∂w_z folgende Resultate

4) $$\partial y_z = -\frac{W\cdot(\partial X_z - \partial Z_x) + X\cdot(\partial Z_w - \partial W_z) + Z\cdot(\partial W_x - \partial X_w)}{W\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) + X\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_x - \partial X_w)}$$

5) $$\partial x_z = +\frac{W\cdot(\partial Y_z - \partial Z_y) + Y\cdot(\partial Z_w - \partial W_z) + Z\cdot(\partial W_y - \partial Y_w)}{W\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) + X\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_x - \partial X_w)}$$

6) $$\partial w_z = -\frac{X\cdot(\partial Y_z - \partial Z_y) + Y\cdot(\partial Z_w - \partial X_z) + Z\cdot(\partial X_y - \partial Y_x)}{W\cdot(\partial X_y - \partial Y_x) + X\cdot(\partial Y_w - \partial W_y) + Y\cdot(\partial W_x - \partial X_w)}.$$

Da nun die Bedingungsgleichung (5.) den Nenner dieser 3 Ausdrücke für ∂y_z, ∂x_z und ∂w_z, zu Null macht, so enthalten im Falle sie erfüllt ist, diese 3 letztern Gleichungen nach (§. 221. d. I. Th. d. S.) einen Widerspruch; und dieser zeigt an, daß die Reduktion der Gleichung

1) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

auf die andere einfachere

2) $$A\cdot\partial a + B\cdot\partial b + C\cdot\partial c = 0$$

nun nicht möglich ist; den Fall wiederum ausgenommen, wo die Zähler der 3 Ausdrücke (4.—6.) ebenfalls der Null gleich werden, wo dann diese Gleichungen (4.—6.) keinen Widerspruch enthalten, sondern bloß ∂y_z, ∂x_z und ∂w_z unbestimmt lassen, so daß nun die Reduktion der Gleichung

1) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w = 0$$

auf die Form

2) $$A\cdot\partial a + B\cdot\partial b + C\cdot\partial c = 0,$$

auf unendlich viele Arten statt finden kann.

So wie aber außer dem Nenner auch noch jeder der 3 Zähler der Ausdrücke in (4.—6.) der Null gleich ist, so hat man wieder genau dieselben 4 Gleichungen erfüllt, welche nach (§. 407.

und §. 408.) als Bedingungsgleichungen der Integrabilität der Gleichung

1) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w=0$$

gefunden worden sind. In diesem Falle also allein ist es möglich, nicht bloß die Gleichung (1.) auf die Gleichung

2) $$A\cdot\partial a+B\cdot\partial b+C\cdot\partial c=0,$$

sondern diese auch wieder nach (§. 412.) auf diese noch einfachere

3) $$A'\cdot\partial a'+B'\cdot\partial b'=0$$

zurückzuführen, während die letztere, da sie nur die beiden Veränderlichen a′ und b′ enthält, allemal einen integrirenden Faktor hat, und integrabel ist.

C. Wenn die gegebene Gleichung 5 Veränderliche enthält, also die Form

$$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w+V\cdot\partial v=0$$

hat.

§. 415.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w+V\cdot\partial v=0,$$

wo Z, Y, X, W, V gegebene Funktionen der 5 Veränderlichen v, w, x, y und z sind.

I. Genügt diese Gleichung allen Bedingungen der Integrabilität, wie solche im (§. 409.) entwickelt sind, so giebt es eine einzige Urgleichung mit einer willkührlichen Konstante c, welche ihr genügt, und welche zugleich als ihr allgemeines Integral angesehen werden kann.

II. Ist aber die gegebene Differenzialgleichung nur unter der Voraussetzung integrabel, daß $\partial v=0$ und v als konstant gedacht wird, so findet man ganz analog nach (Nr. II. des §. 413.) ein System zweier Urgleichungen, welches der gegebenen Differenzialgleichung genügt.

III. Ist ferner die gegebene Differenzialgleichung nur dann integrabel, wenn $\partial v = 0$ und $\partial w = 0$ und v und w als konstant gedacht werden, so verschafft man sich auf demselben Wege ein System dreier Urgleichungen, welches der gegebenen Differenzialgleichung genügt.

IV. Genügt endlich die gegebene Differenzialgleichung

1) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w + V\cdot\partial v = 0$$

keiner einzigen der in (I.) angeführten Bedingungsgleichungen, so verschafft man sich genügende Systeme von vier Urgleichungen auf nachstehendem Wege.

Man denkt sich nämlich zunächst 3 der 5 Veränderlichen, v, w, x als konstant, findet für die Gleichung (1.) unter dieser Voraussetzung, also für die Gleichung

2) $$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y = 0,$$

den integrirenden Faktor M, integrirt damit die (2.); nimmt dann das erhaltene Integral

3) $$f_{z,y,x,w,v} = \varphi_{x,w,v},$$

wo $\varphi_{x,w,v}$ eine willkührliche Funktion der Konstanten x, w, v, und dabei

4) $$\partial f_z = M\cdot Z \quad \text{und} \quad \partial f_y = M\cdot Y$$

ist, als eine noch willkührlich hinzugedachte Relation zwischen den 5 Veränderlichen an, welcher ebenfalls genügt werden soll; und man erhält dann, indem genau nach den (§. §. 410. und 411.) verfahren wird, die Systeme der 4 Urgleichungen

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad f = \varphi;\quad \partial f_x - M\cdot X = \partial\varphi_x;\quad \partial f_w - M\cdot W = \partial\varphi_w;$$
$$\partial f_v - M\cdot V = \partial\varphi_v;$$

und noch das System der 4 Gleichungen

$$(\odot)\cdots \quad f = \varphi,\quad x = c,\quad w = c_1 \quad \text{und} \quad v = c_2,$$

wo c, c_1 und c_2 willkührliche Konstanten sind. Aber man erhält auch noch 6 andere Systeme von 4 Urgleichungen, so nämlich, daß jedes System die Gleichung $f = \varphi$ und von den übrigen Gleichungen der Systeme ($\mathfrak{C}$) und ($\odot$) immer je zwei

aus dem einen, die dritte aber aus dem andern System enthält. Jedes dieser 8 Systeme von 4 Urgleichungen bestimmt 4 von den 5 Veränderlichen, als Funktion der 5ten so, daß der gegebenen Differenzialgleichung genügt wird.

Und da man je drei von den fünf Veränderlichen anfänglich als konstant ansehen kann, so erhält man auf diesem Wege 10 mal so viel, also 80 Systeme von 4 Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen, und von denen die meisten noch willkührliche Funktionen in sich aufnehmen.

Anmerkg. Genau dieselben Resultate wie in (Nro. IV.) würde man aber erhalten, wenn man in der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w + V\cdot\partial v = 0$$

zuerst nur zwei, oder gar nur einen der 5 Veränderlichen als konstant ansehen, der Gleichung in diesem Sinne durch Systeme zweier oder dreier Urgleichungen nach den (§. 410. oder §. 413.) genügen, dann aber diese Urgleichungen im allgemeinsten Sinne aufgefaßt, als Relationen zwischen den 5 Veränderlichen, welche man noch statt finden lassen will, annehmen, und nun der gegebenen Differenzialgleichung

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w + V\cdot\partial v = 0$$

nebst noch diesen willkührlich angenommenen Relationen zu genügen suchte. Immer würde man dieselben Systeme von 4 Urgleichungen erhalten, welche bereits im (§. 415.) erhalten worden sind, und welche 4 der 5 Veränderlichen in den 5ten dergestalt bestimmen, daß sie der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

Anmerkg. 2. Da man statt einiger der alten Veränderlichen auch neue Veränderliche einführen, und die neu entstehende Gleichung dann auf demselben Wege der (N. IV. des §. 415.) behandeln kann, ganz so wie dies bereits in den (N.N. VI.—VIII. des §. 411.) bemerkt sich findet, so erhält man auf diesem Wege unendlich viele Systeme zusammengehöriger Gleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

§. 416.

Nimmt man aber, wenn wieder, wie im (§. 415. Nr. IV.), keine der dort erwähnten Bedingungsgleichungen erfüllt ist, zuerst von den 5 Veränderlichen der gegebenen Differenzialgleichung

1) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w+V\cdot\partial v=0,$$

nur einen einzigen als konstant an, z. B. v, und genügt man der Gleichung in diesem Sinne, also der Gleichung

2) $$Z\cdot\partial z+Y\cdot\partial y+X\cdot\partial x+W\cdot\partial w=0,$$

nicht durch Systeme dreier Urgleichungen, sondern nach dem (§. 414.) durch das System der beiden Urgleichungen (ℭ) oder (⊙) daselbst, also z. B. durch das System (ℭ)

3) $f_{a,b,c,v}=\varphi_{c,v}$ und 4) $F_{a,b,c,v}=\partial\varphi_c$,

(in welchen a, b, c bestimmte Funktionen von z, y, x, w bedeuten, während $\varphi_{c,v}$ eine willkührliche Funktion von c und v, dagegen f und F bestimmte und bekannte Funktionen von a, b, c sind, welche jedoch ebenfalls, wie a, b, c selbst, auch die Konstante v in sich aufgenommen haben können), so kann man nun auch diese beiden Gleichungen (3. und 4.) als Relationen zwischen z, y, x, w und v annehmen, also Funktionen z, y, x, w, v suchen, welche nicht bloß der Gleichung (1.), sondern auch noch den beiden Gleichungen (3. und 4.) genügen.

Differenziirt man aber die Gleichung (3.) in ihrem jetzigen Sinne, so erhält man

5) $$\mathfrak{Z}\cdot\partial z+\mathfrak{Y}\cdot\partial y+\mathfrak{X}\cdot\partial x+\mathfrak{W}\cdot\partial w+\mathfrak{V}\cdot\partial v=0,$$

wo, indem man nach (4.) F statt $\partial\varphi_c$ schreibt,

6)
$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{Z}=\partial f_z-F\cdot\partial c_z\\ \mathfrak{Y}=\partial f_y-F\cdot\partial c_y\\ \mathfrak{X}=\partial f_x-F\cdot\partial c_x\\ \mathfrak{W}=\partial f_w-F\cdot\partial c_w\\ \mathfrak{V}=\partial f_v-F\cdot\partial c_v-\partial\varphi_v\end{array}\right\}$$

gesetzt worden ist. Weil jedoch diese Gleichung (5.) mit der gegebenen Differenzialgleichung (1.) zusammenfallen muß, wenn v konstant gedacht wird, so ist nothwendig

7) $$\frac{Z}{\mathfrak{Z}} = \frac{Y}{\mathfrak{Y}} = \frac{X}{\mathfrak{X}} = \frac{W}{\mathfrak{W}}.$$

Nimmt man daher einen dieser 4 gleichen Quozienten auch noch

$$= \frac{V}{\mathfrak{V}},$$

so ist die Gleichung (5.) auch dann nicht mehr von der gegebenen (1.) verschieden, wenn auch v nicht mehr konstant, sondern nun ebenfalls veränderlich gedacht ist.

Diese neue Gleichung

8) $$\frac{Z}{\mathfrak{Z}} = \frac{V}{\mathfrak{V}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{V} \cdot Z = \mathfrak{Z} \cdot V \quad \text{oder} \quad \mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{Z}}{Z} \cdot V$$

wird aber, wenn man statt $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{V}$ ihre Werthe aus (6.) substituirt, folgende, nämlich

9) $$\partial f_{(v)} - F \cdot \partial c_v - \frac{\partial f_{(z)} - F \cdot \partial c_z}{Z} \cdot V = \partial \varphi_{v'},$$

wo der Ausdruck zur Linken eine bestimmte und bekannte Funktion von z, y, x, w und v ist.

Der gegebenen Differenzialgleichung

1) $$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + V \cdot \partial v = 0$$

genügt also auch das System der 3 Urgleichungen (3. 4. und 9.) d. h. der 3 Urgleichungen

$(\odot)\cdots$ $$f = \varphi_{c,v'} \quad F = \partial \varphi_c \quad \text{und} \quad F' = \partial \varphi_{v'},$$

wenn man der Kürze wegen den Ausdruck in (9.) zur Linken, nämlich

10) $$\partial f_{(v)} - F \cdot \partial c_v - \frac{\partial f_{(z)} - F \cdot \partial c_z}{Z} \cdot V \quad \text{durch} \quad F'$$

bezeichnet. Dabei sind f, F und F′ bestimmte Funktionen der 5 Veränderlichen z, y, x, w und v; dagegen ist $\varphi_{c,v}$ eine ganz willkührliche Funktion der beiden Veränderlichen c und v, während c (so wie a und b) eine völlig bestimmte Funktion von z, y, x, w und v ist.

Anmerkg. 1. Wollte man, immer unter der Vorausſetzung

daß gar keine der im (§. 415. Nr. I.) erwähnten Bedingungsgleichungen erfüllt ist, das Verfahren der (§§. 412. und 414.) hier anwenden, um die Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + V \cdot \partial v = 0$$

zwischen den 5 Veränderlichen z, y, x, w und v, auf die andere

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c + D \cdot \partial d = 0$$

zu reduziren, welche nur die 4 Veränderlichen a, b, c, d enthält, so würde man bei der Durchführung auf eine Bedingung stoßen, welche von den Koeffizienten Z, Y, X, W, V erfüllt seyn muß, wenn diese Reduktion möglich seyn soll, gerade so wie (§. 412.) in dem Falle, wo die Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x = 0$$

zwischen den 3 Veränderlichen z, y und x, auf die Gleichung

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b = 0$$

zurückgeführt werden sollte; während dieselbe Reduktion der Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w = 0$$

zwischen 4 Veränderlichen z, y, x und w, auf eine andere von nur 3 Veränderlichen,

$$A \cdot \partial a + B \cdot \partial b + C \cdot \partial c = 0$$

im (§. 414.), mit einer einzigen in der (Anmerkg. 3. zu §. 414.) bemerkten Ausnahme, welche aber bei der hier im Eingange gemachten Voraussetzung ebenfalls nicht statt hat, durchgeführt werden konnte.

Später wird man einsehen, warum eine ähnliche Reduktion bei einer geraden Anzahl von Veränderlichen allemal möglich, bei einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen aber allemal unmöglich ist.

Anmerkg. 2. Verfährt man genau so wie zu Anfang des (§. 416.) selbst, nimmt aber statt des Systems (☾) des (§. 414.), jetzt lieber das System (⊙) desselben (§. 414.) zu Hilfe, so hat man sogleich die 3 Gleichungen

I. $f_{a,b,c} = C_1$; $c_{z,y,x,w,v} = C_2$ und $v = C_3$,

wo C_1, C_2, C_3 willkührliche Konstanten vorstellen, während a, b, c Funktionen von z, y, x, w sind, welche auch v enthalten können; und dieses System von 3 Gleichungen genügt der gegebenen Differenzialgleichung

II. $Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + V \cdot \partial v = 0$.

Wollte man nun hier C_1 als eine willkührliche Funktion von C_2 und C_3 ansehen, dagegen C_2 und C_3 dergestalt veränderlich nehmen, daß dasselbe System (I.) doch noch der Differenzialgleichung (2.) genügt, so würde man zu dem Resultat des (§. 416.) selbst wieder zurückgeführt.

Wollte man aber C_1 und C_2 als zwei willkührliche Funktionen von C_3 ansehen, letzteres C_3 jedoch so veränderlich nehmen, daß dasselbe System (I.) ebenfalls noch der Differenzialgleichung (II.) genügen könne, so bekommt man eine neue Auflösung der Aufgabe in welcher der gegebenen Gleichung (2.) durch Systeme 3er Ur-Gleichungen genügt werden soll.

Alles dieses findet sich aber im (§. 422.) viel allgemeiner gegeben.

D. Wenn die gegebene Gleichung 6 Veränderliche, also die Form

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + V \cdot \partial v + U \cdot \partial u = 0$$

hat.

§. 417.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$Z \cdot \partial z + Y \cdot \partial y + X \cdot \partial x + W \cdot \partial w + V \cdot \partial v + U \cdot \partial u = 0,$$

in welcher Z, Y, X, W, V, U Funktionen der 6 Veränderlichen z, y, x, u, v, w sind, und betrachten wir hier sogleich den Fall, in welchem gar keine der im (§. 409.) aufgezählten Bedingungsgleichungen der Integrabilität erfüllt ist, so läßt sich von ihr zunächst folgendes sagen:

I. Man findet, wenn man 4 der 6 Veränderlichen zunächst

als konstant ansieht, und nach (§. 415.) verfährt, sogleich und unmittelbar eine gewisse Anzahl von Systemen von fünf Urgleichungen, welche eine willkührliche Funktion von 4 der Veränderlichen nebst den Ableitungen dieser Funktion nach allen 4 Veränderlichen in sich aufnehmen, und welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen. — Die Anzahl dieser Systeme ist 15·16 oder 240. — Durch Einführung neuer Veränderlichen kann aber die Anzahl dieser genügenden Systeme von Urgleichungen bis in's Unendliche vermehrt werden.

II. Hernach giebt es noch Systeme von vier Urgleichungen, welche ebenfalls der gegebenen Differenzialgleichung genügen, aber natürlich nur 4 der 6 Veränderlichen bestimmen, so daß die 5te eine ganz willkührliche Funktion der 6ten bleibt. Diese Systeme von 4 Urgleichungen erhält man, wenn man nur einen der 6 Veränderlichen als konstant ansieht, dann aber für die unter dieser Voraussetzung entstehende Differenzialgleichung zwischen 5 Veränderlichen nach (§. 416.) das ihr genügende System dreier Urgleichungen

2) $f = \varphi_{c,v,u}$; 3) $F = \partial\varphi_c$; 4) $F' = \partial\varphi_v$

als 3 neue willkührliche Abhängigkeiten zwischen den 6 Veränderlichen annimmt, dann die Gleichung (2.) differenziirt, und mit der gegebenen Differenzialgleichung (1.) vergleicht, ganz so wie solches im (§. 410.) zu lesen ist. Man wird dann finden, daß der (1.) genügt wird, indem eine Gleichung von der Form

5) $$F'' = \partial\varphi_u$$

zu den in (2.—4.) eben angenommenen Gleichungen noch hinzutritt. Das System der 4 Gleichungen (2. 3. 4. und 5.) genügt also dann der gegebenen Differenzialgleichung (1.), und enthält dabei eine willkührliche Funktion $\varphi_{c,v,u}$ von einer bestimmten Funktion $c_{z,y,x,w,v,u}$ und noch den beiden Veränderlichen v und u.

III. Endlich kann man auch noch eine Anzahl von Systemen dreier Urgleichungen finden, welche der gegebenen Differen-

zialgleichung (1.) genügen, welche nun natürlich nur 3 der 6 Veränderlichen bestimmen, so daß die 4te und die 5te ganz beliebige Funktionen der 6ten bleiben, und welche eine willkührliche Funktion $\varphi_{c',e}$ zweier bestimmten Funktionen $c'_{z,y,x,w,v,u}$ und $e_{z,y,x,w,v,u}$ in sich aufnehmen. —

Um eines dieser letztern Systeme zu finden, darf man nur wieder das Verfahren des (§. 414.) anwenden, nämlich 5 neue Veränderliche a, b, c, d, e statt der 5 alten y, x, u, v, w einführen, durch 5 Gleichungen, welche auch den 6ten Veränderlichen z in sich aufnehmen, und so die Gleichung (1.) auf diese Form

$$6) \qquad A\cdot\partial a + B\cdot\partial b + C\cdot\partial c + D\cdot\partial d + E\cdot\partial e = 0$$

zurückführen, wo A, B, C, D, E bloß noch Funktionen von a, b, c, d, e sind (und namentlich nicht z enthalten). — Die Rechnung selbst läßt sich dasmal, bei 6 Veränderlichen, ohne allen Anstoß so durchführen, wie im (§. 414.) bei 4 Veränderlichen, während sie sich bei 5 und 3 Veränderlichen nicht durchführen ließ, sondern zu Bedingungsgleichungen führte, welche zuvor von den gegebenen Z, Y, X, W, V erfüllt seyn mußten, wenn die gewünschte Reduktion möglich seyn sollte.

Hat man aber die Gleichung (1.) auf die Gleichung (6.) reduzirt, so findet man nun nach (§. 416.) die Systeme dreier Urgleichungen, welche ihr (der 6. und also auch der 1.) genügen.

IV. Durch Systeme zweier Urgleichungen (so daß 3 der 6 Veränderlichen ganz willkührliche Funktionen der 4ten blieben, während die beiden übrigen durch die beiden Urgleichungen bestimmt sind) kann man der Gleichung (1.) nur dann genügen, wenn zwischen den gegebenen Funktionen Z, Y, X, W, V und U noch Bedingungsgleichungen statt finden, welche man, dem Geiste der vorhergehen (§. §.) zufolge, leicht auffinden kann. — Und noch mehr Bedingungsgleichungen müssen erfüllt seyn, (nämlich die in dem §. 409. besprochenen Bedingungsgleichungen der Integrabilität), wenn der gegebenen Differenzialgleichung (1.) nur durch eine einzige Urgleichung zwischen z, y, x, w, v und u

genügt werden soll, in welchem letztern Falle 4 von den 6 Veränderlichen ganz willkührliche Funktionen einer 5ten bleiben, während die 6te durch die einzige Urgleichung dann bestimmt wird.

E. Wenn die gegebene Gleichung 7 Veränderliche enthält.

§. 418.

Enthält die gegebene Differenzialgleichung von der hier behandelten Form 7 Veränderliche z, y, x, w, v, u, t, so findet für sie folgendes statt, unter der Voraussetzung, daß sie keiner einzigen der im (§. 409.) aufgestellten Bedingungsgleichungen der Integrabilität genügt, wie solches in (N. III. des §. 413.) und in (N. IV. des §. 415.), so wie im (§. 417.) ebenfalls angenommen worden ist.

I. Man findet wieder Systeme von sechs Urgleichungen, durch welche 6 der Veränderlichen in den 7ten ausgedrückt sind, und welche eine willkührliche Funktion φ von 5 der Veränderlichen, nebst den Ableitungen von φ nach diesen letztern, in sich aufgenommen haben, und welche dann der gegebenen Differenzialgleichung genügen, wenn man genau nach den (§§. 410. 413. III. und 415. IV.) verfährt.

II. Man erhält noch Systeme von fünf Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen, während der 6te Veränderliche eine willkührliche Funktion des 7ten bleibt, und welche eine willkührliche Funktion φ von 4 bestimmten Funktionen in sich aufnehmen; wenn man wie in dem (§. 416.) verfährt. —

III. Man erhält ferner noch eine große Anzahl von Systemen von vier Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen, während zwei der sieben Veränderlichen ganz willkührliche Funktionen einer dritten bleiben, und welche eine willkührliche Funktion φ von 3 bestimmten Funktionen in sich aufnehmen; wenn man nach (§. 416.) verfährt, und dabei noch (§. 417. Nr. III.) zu Hilfe nimmt.

IV. Will man aber der gegebenen Differenzialgleichung auch noch durch ein System dreier Urgleichungen genügen, dadurch daß man versucht nach den (§. §. 412. und 414.) die gegebene Gleichung auf die Form der sechsgliedrigen

$$A\cdot\partial a+B\cdot\partial b+C\cdot\partial c+D\cdot\partial d+E\cdot\partial e+F\cdot\partial f=0$$

zu reduziren, für welche letztere dann nach (§. 417. III.) ein solches ihr genügendes System dreier Urgleichungen statt findet; so stehen der Ausführung der Rechnung Hindernisse entgegen, welche nur dadurch gehoben werden können, daß die Koeffizienten der gegebenen Differenzialgleichung gewissen Bedingungsgleichungen genügen.

Und noch mehr Bedingungsgleichungen findet man, wenn man der gegebenen Differenzialgleichung durch Systeme zweier Urgleichungen, oder wenn man ihr gar nur durch eine einzige Urgleichung genügen will. Die letzteren Bedingungen sind aber keine andern, als die in dem (§. 409.) besprochenen Bedingungsgleichungen der Integrabilität.

F. Wenn die Anzahl der Veränderlichen $p+1$ ist.

§. 419.

Man wird bereits aus dem vorhergehenden abgesehen haben, daß, wenn es darauf ankommt, einer gegebenen Differenzialgleichung zwischen $p+1$ Veränderlichen von der Form

$$1)\quad \begin{cases} X_0\cdot\partial x_0+X_1\cdot\partial x_1+X_2\partial x_2+\cdots \\ \qquad\qquad +X_{p-1}\cdot\partial x_{p-1}+X_p\cdot\partial x_p=0 \\ \text{oder} \quad S\left[\,X_a\cdot\partial x_a\,\right]_{a+b=p}=0 \\ \text{oder} \quad S\left[\,X_a\cdot\partial x_a\,\right]_{a+b=p-1}+X_p\cdot\partial x_p=0 \end{cases},$$

in welcher $X_0, X_1, X_2, \cdots X_{p-1}$ und X_p beliebig gegebene Funktionen der $p+1$ Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{p-1}$ und x_p vorstellen, durch Systeme von der geringsten Anzahl von Urgleichungen zu genügen, so daß diese Systeme eine willkührliche

Funktion der größtmöglichen Anzahl bestimmter Funktionen in sich aufnehmen; — daß dann alles darauf ankommt, das von Pfaff *) zuerst gelehrte Verfahren eintreten zu lassen, welches wir bereits in den (§. §. 412. und 414.) für die einfacheren Fälle kennen gelernt haben, nämlich das Verfahren, durch welches versucht wird, die gegebene Differenzialgleichung zwischen p+1 Veränderlichen auf eine andere zwischen nur p Veränderlichen, welche von derselben Form, d. h. nach den Ableitungen der Veränderlichen wiederum linear ist, zurückzuführen. — Betrachten wir daher hier zunächst noch einmal dieses Pfaff'sche Verfahren, aber ganz im Allgemeinen.

Man führt nämlich statt p der erstern Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}$ diese p anderen $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ ein, mittelst der p Gleichungen

$$2) \qquad x_\alpha = (\xi_\alpha)_{a_0, a_1, a_2 \cdots, a_{p-1}, x_p'}$$

wo α nach und nach jeden der Werthe 0, 1, 2, ... p—1 vorstellen mag, und wo diese p neuen Funktionen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{p-1}$ anfänglich ganz unbestimmt gedacht sind, nachgehends aber zweckgemäß bestimmt werden. Dadurch wird aber

$$3) \begin{cases} \partial x_\alpha = \partial(\xi_\alpha)_{a_0} \cdot \partial a_0 + \partial(\xi_\alpha)_{a_1} \cdot \partial a_1 + \cdots \\ \qquad + \partial(\xi_\alpha)_{a_{p-1}} \cdot \partial a_{p-1} + \partial(\xi_\alpha)_{x_p} \cdot \partial x_p \\ \text{oder} \quad \partial x_\alpha = S\left[\partial(\xi_\alpha)_{a_\gamma} \cdot \partial a_\gamma\right]_{\gamma+\delta=p-1} + \partial(\xi_\alpha)_{x_p} \cdot \partial x_p. \end{cases}$$

Setzt man nun diese Werthe aus (2. und 3.) zur Rechten, statt x_α und ∂x_α in die 3:e Form der gegebenen Differenzialgleichung, (1.) so geht diese (1.) in folgende Differenzialgleichung über:

$$4) \quad S\left[X_\alpha \cdot \partial(\xi_\alpha)_{a_\gamma} \cdot \partial a_\gamma\right]_{\alpha+\beta=p-1,\ \gamma+\delta=p-1} = 0 \quad \text{oder} \quad S\left[A_\gamma \cdot \partial a_\gamma\right]_{\gamma+\delta=p-1} = 0,$$

wenn der Kürze wegen

---

*) M. s. die Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissensch. aus den Jahren 1814 — 1815, bei Reimer 1815; und zwar die am 11ten Mai 1815 in der Akademie gelesene Abhandlung des Professors Pfaff „de nova methodo integrandi.“

$$5) \qquad S\left[\underset{a+b=p-1}{X_a \cdot \partial(\xi_a)_{a_c}}\right] = A_t,$$

außerdem aber der Koeffizient von ∂x_p, $= 0$ gesetzt wird, so daß man zur Bestimmung der Funktionen ξ_a einstweilen die Gleichung hat:

$$\text{I.} \begin{cases} S\left[\underset{a+b=p-1}{X_a \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}}\right] + X_p = 0, \\ \text{oder} \quad S\left[\underset{a+b=p}{X_a \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}}\right] = 0, \end{cases}$$

wenn unter ξ_a für $a = p$, also unter ξ_p bloß x_p gedacht wird, so daß $\partial(\xi_p)_{x_p} = \partial(x_p)_{x_p} = 1$ ist.

Diese Gleichung (4.) ist nun schon die gesuchte zwischen nur p Veränderlichen, wenn es nur gelingt, die Funktionen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}$ so zu bestimmen, daß in den Koeffizienten dieser Gleichung der $p+1$te Veränderliche x_p selbst ebenfalls nicht mehr vorkommt, oder doch nur in einem, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor, durch welchen wegdividirt werden kann. — Nun haben wir aber in den (§§. 412. 414.) gesehen, daß dieser Bedingung entsprochen ist, sobald diesen folgenden $p-1$ Gleichungen

$$\text{II.} \quad \frac{\partial(A_0)_{(x_p)}}{A_0} = \frac{\partial(A_1)_{(x_p)}}{A_1} = \frac{\partial(A_2)_{x_p}}{A_2} = \cdots = \frac{\partial(A_{p-1})_{(x_p)}}{A_{p-1}}$$

genügt wird. Damit man aber bei der Bestimmung der p Funktionen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}$ aus den p Gleichungen (I. u. II.) nicht zu Parzialgleichungen gelange, sondern nur p totale Differenzialgleichungen erhalte, in welchen die Ableitungen der Funktionen ξ_a nur allein nach dem einzigen Veränderlichen x_p, und nicht auch noch die Ableitungen nach den übrigen Veränderlichen $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ vorkommen: so muß man vor allen Dingen $\partial(A_c)_{(x_p)}$ so umformen, daß die Ableitungen $\partial(\xi_a)_{a_c}$ nur als Faktoren erscheinen, damit die Zähler in (II.) dieselbe Form erhalten, welche die Nenner haben.

Nun erhält man aber aus (5.), nach der Formel

$$\partial(u \cdot v) = u \cdot \partial v + v \cdot \partial u,$$

$$6)\quad \partial(A_c)_{(x_p)} = S\Big[\partial(X_a)_{(x_p)}\cdot\partial(\xi_a)_{a_c}\Big]_{a+b=p-1} + S\Big[X_a\cdot\partial^{1,1}(\xi_a)_{a_c/x_p}\Big]_{a+b=p-1}$$

Um nun hieraus die in dem letztern Aggregat enthaltenen doppelten Ableitungen eliminiren zu können, differenziire man die Gleichung (I.) nach allem a_c, wo, wie in (6.) c einen einzigen bestimmten seiner Werthe $0, 1, 2, 3, \cdots p-1$, vorstellt. Man erhält dann sogleich

$$7)\quad 0 = S\Big[\partial(X_a)_{(a_c)}\cdot\partial(\xi_a)_{x_p}\Big]_{a+b=p} + S\Big[X_a\cdot\partial^{1,1}(\xi_a)_{x_p/a_c}\Big]_{a+b=p-1},$$

während, weil a_c in $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}$ zugleich vorkommt, wiederum für jeden Werth von a, welcher $0, 1, 2, \cdots, p-1$ oder p ist, folgende Gleichung statt finden wird, nämlich:

$$8)\quad \partial(X_a)_{(a_c)} = S\Big[\partial(X_a)_{x_e}\cdot\partial(\xi_e)_{a_c}\Big]_{e+f=p-1}.$$

Setzt man diesen Werth aus (8.) für $\partial(X_a)_{(a_c)}$ in die (7.), subtrahirt man dann die (7.) von der (6.), und bedenkt man zu gleicher Zeit, daß, weil x_p in X_a explizit und implizit in $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ vorkommt, auch noch ist

$$10)\quad \partial(X_a)_{(x_p)} = S\Big[\partial(X_a)_{x_e}\cdot\partial(\xi_e)_{x_p}\Big]_{e+f=p},$$

wenn nur immer unter ξ_p nichts anders als x_p gedacht wird, so daß $\partial(\xi_p)_{x_p} = \partial(x_p)_{x_p} = 1$ wird; so erhält man, wenn in dem zu subtrahirenden Aggregat, a und e, und auch b und f mit einander vertauscht werden,

$$11)\quad \partial(A_c)_{(x_p)} = S\Big[\big(\partial(X_a)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_a}\big)_{a+b=p-1,}\cdot\partial(\xi_e)_{x_p}\cdot\partial(\xi_a)_{a_c}\Big]_{e+f=p},$$

wo man nur, sobald $e = p$ wird, unter ξ_p, welches an sich gar keinen Sinn hat, weil die Funktionen ξ_a nur bis zu ξ_{p-1} gehen, allemal x_p verstehen muß, so daß $\partial(\xi_p)_{x_p} = \partial(x_p)_{x_p} = 1$ wird. Dann läßt sich noch kürzer schreiben

$$12)\quad \partial(A_c)_{x_p} = S\Big[X'_a\cdot\partial(\xi_a)_{a_c}\Big]_{a+b=p-1},$$

wenn die Bedeutung von X'_a festgestellt ist durch die Gleichung

$$13) \qquad X'_n = S\Big[\big(\partial(X_n)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_n}\big)\cdot\partial(\xi_e)_{x_p}\Big]_{e+f=p}.$$

Substituirt man nun diesen Ausdruck aus (12.) in die Gleichungen (II.), so erhellet, daß letzteren allen genügt ist, so oft man

$$\text{III.} \qquad \frac{X'_0}{X_0} = \frac{X'_1}{X_1} = \frac{X'_2}{X_2} = \cdots = \frac{X'_{p-1}}{X_{p-1}}$$

nimmt.

Alle Gleichungen (II.) sind also erfüllt, wenn die p Funktionen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}$ so gewählt werden, daß sie den $p-1$ in (III.) enthaltenen Gleichungen genügen. — Diese Gleichungen (III.) sind aber alle vorgestellt durch die einzige Gleichung

$$\text{IV.} \qquad \frac{X'_0}{X_0} = \frac{X'_n}{X_n} \quad \text{oder} \quad X'_0\cdot X_n - X_0\cdot X'_n = 0,$$

wenn man statt n nach und nach $1, 2, 3, \cdots p-1$ setzt; und substituirt man in dieser Gleichung (IV.) statt X'_n und X'_0 ihre Werthe aus (13.), so geht diese wiederum über in

$$\text{V.} \quad S\Big[\Big(X_n\cdot\big(\partial(X_0)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_0}\big) - X_0\cdot\big(\partial(X_n)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_n}\big)\Big)\cdot\partial(\xi_n)_{x_p}\Big]_{e+f=p} = 0,$$

welche Gleichung also die $p-1$ Gleichungen (III.) oder (II.) ersetzt, indem man aus ihr (der V.) dadurch $p-1$ Gleichungen entnimmt, daß statt n nach und nach $1, 2, 3, \cdots p-1$ geschrieben wird.

Diese $p-1$ Gleichungen (V.) in Verbindung mit der (I.), also diese p Gleichungen, welche alle in Bezug auf die Ableitungen die lineäre Form

$$♂\cdots \quad K_0\cdot\partial(\xi_0)_{x_p} + K_1\cdot\partial(\xi_1)_{x_p} + \cdots + K_{p-1}\cdot\partial(\xi_{p-1})_{x_p} + K_p = 0$$

haben, d. h. die Form der algebraischen Gleichungen vom ersten Grade, dienen nun zur Bestimmung der p unbekannten Ableitungen

$$\partial(\xi_0)_{x_p},\ \partial(\xi_1)_{x_p},\ \partial(\xi_2)_{x_p},\ \cdots\ \partial(\xi_{p-1})_{x_p};$$

und diese p Gleichungen, integrirt, geben dann diese Funktionen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{p-1}$, in x_p und noch p Konstanten $a_0, a_1,$

$a_2, a_3, \cdots a_{p-1}$ ausgedrückt. Die Reduktion der gegebenen Differenzialgleichung

1) $X_0 \cdot \partial x_0 + X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + \cdots + X_p \cdot \partial x_p = 0$

zwischen $p+1$ Veränderlichen auf diese andere

4) $A_0 \cdot \partial a_0 + A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + \cdots + A_{p-1} \cdot \partial a_{p-1} = 0$

zwischen nur p Veränderlichen, ist daher allemal möglich, so oft die p Gleichungen von der Form (♂) die p Ableitungen $\partial(\xi_0)_{x_p}$, $\partial(\xi_1)_{x_p}$, $\cdots$ $\partial(\xi_{p-1})_{x_p}$ wirklich liefern, also so lange nicht der, in den für diese Ableitungen gefundenen Ausdrücken befindliche Nenner N der Null gleich wird (§. 96. und §. 221. d. I. Th. d. S.).

Nun wissen wir aus den, in den (§.§. 412. 414. u. 417. III.) für die einzelnen Fälle angestellten Rechnungen (in welchen Fällen $p = 2, 3, 4, 5$ gewesen ist), daß dieser in Rede stehende Nenner $= 0$ wurde, als $p = 2$ oder 4 gewesen ist, dagegen nicht der Null gleich wurde für $p = 3$ oder 5. Wahrscheinlich tritt also der erstere Fall allemal ein, so oft p eine gerade Zahl, dagegen der andere Fall, so oft p eine ungerade Zahl ist.

Diese Vermuthung wird aber auf die alleranschaulichste Weise zur Gewißheit erhoben, wenn man den von Jakobi *) zuerst gezeigten Weg der Rechnung verfolgt. Man setzt zu dem Ende die Rechnung bis zur (N. 13.) fort, wie oben geschehen, drückt aber die Gleichungen (II.) lieber so aus, nämlich:

VI. $$\frac{\partial(A_c)_{(x_p)}}{A_c} = \frac{1}{Q} \quad \text{oder} \quad \partial(A_c)_{(x_p)} - A_c \cdot \frac{1}{Q} = 0,$$

indem man dem c die p Werthe 0, 1, 2, 3, ... p—1 giebt, so daß die (VI.) die Stelle von p Gleichungen vertritt, während $\frac{1}{Q}$ immer ein und dasselbe bleiben muß, noch unbestimmt gedacht wird, jedoch selber bestimmt werden kann. — Setzt man aber in (VI.) die Werthe aus (5. und 12.), so geht solche über in

---

*) „Ueber die Pfaff'sche Integrations-Methode" in Crelle's Journal der Mathematik. II. Band 4tes Heft.

$$\text{VII.} \qquad S\left[\left(X'_a - X_a \cdot \frac{1}{Q}\right) \cdot \partial(\xi_a)_{a_c}\right] = 0,$$
$$a+b=p-1$$

und dieser Gleichung wird, unabhängig von $\partial(\xi_a)_{a_c}$ genügt, so oft

$$\text{VIII.} \qquad X'_n - X_n \cdot \frac{1}{Q} = 0$$

genommen wird für jedes n, welches 0, 1, 2, 3, ... p—1 ist, während die Gleichung (VIII.), nach (13.), in

$$\text{IX.} \quad S\left[\left(\partial(X_n)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_n}\right) \cdot \partial(\xi_e)_{x_p}\right] = X_n \cdot \frac{1}{Q}$$
$$e+f=p$$

übergeht, und immer noch p Gleichungen repräsentirt, die aus der (IX.) hervorgehen, wenn nach und nach 0, 1, 2, 3 ... p—1 statt n gesetzt wird.

Multiplizirt man aber jede dieser n Gleichungen, d. h. den Repräsentanten derselben für $n = a$, mit $\partial(\xi_a)_{x_p}$, und addirt man diese Produkte, so erhält man

$$\text{X.} \quad S\left[\left(\partial(X_a)_{x_c} - \partial(X_e)_{x_a}\right) \cdot \partial(\xi_a)_{x_p} \cdot \partial(\xi_e)_{x_p}\right] = S\left[X_a \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}\right] \cdot \frac{1}{Q};$$
$$a+b=p-1, \quad e+f=p \qquad\qquad a+b=p-1$$

oder, weil sich je zwei Glieder in dem Aggregat zur Linken, nämlich die beiden für $a = m$, $e = n$ und $a = n$, $e = m$ hervorgehenden gegenseitig aufheben, also nur die bleiben, in denen $e = p$ ist,

$$\text{XI.} \quad S\left[\left(\partial(X_a)_{x_p} - \partial(X_p)_{x_a}\right) \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}\right] = S\left[X_a \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}\right] \cdot \frac{1}{Q},$$
$$a+b=p-1 \qquad\qquad a+b=p-1$$

oder, weil nach (I.)

$$S\left[X_a \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}\right] = -X_p \quad \text{ist},$$
$$a+b=p-1$$

$$\text{XII.} \quad S\left[\left(\partial(X_p)_{x_a} - \partial(X_a)_{x_p}\right) \cdot \partial(\xi_a)_{x_p}\right] = X_p \cdot \frac{1}{Q}.$$
$$a+b=p-1$$

Diese Gleichung (XII.) kann nun statt der (I.) genommen werden, weil sie eine Verbindung der p Gleichungen (IX.) mit der

(I.) ist. Diese Gleichung (XII.) geht aber aus der Gleichung (IX.) hervor, wenn man daselbst p statt n schreibt.

Also enthält die Gleichung (IX.) allein die p+1 Gleichungen, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man nach und nach 0, 1, 2, 3, ... p—1 und p statt n setzt, und welche zur Bestimmung der n+1 Unbekannten Q, $Q\cdot\partial(\xi_0)_{x_p}$, $Q\cdot\partial(\xi_1)_{x_p}$, $Q\cdot\partial(\xi_2)_{x_p}$, ... $Q\cdot\partial(\xi_{p-1})_{x_p}$ dienen müssen.

Bezeichnet man nun der Kürze wegen

XIII. $\partial(X_n)_{x_e} - \partial(X_e)_{x_n}$ durch (n,e),

so daß man für jedes n und e

XIV. $(e,n) = -(n,e)$,

dagegen, so oft $n = e$ wird, für jedes n

XV. $(n,n) = 0$

hat, so sind die p+1 Gleichungen (IX.) jetzt, wenn man noch

statt $\partial(\xi_e)_{r_p}$ bloß $\partial\xi_e$

schreibt, und letzteres ∂ stillschweigend auf x_p bezieht,

XVI. $$S\left[\underset{e+f=p}{(n,e)\cdot\partial\xi_e}\right] = X_n\cdot\frac{1}{Q},$$

d. h. wenn man mit Q wegmultiplizirt,

XVII.
$$\begin{cases} * + (0,1)\cdot Q\cdot\partial\xi_1 + (0,2)\cdot Q\cdot\partial\xi_2 + \cdots + (0,p)\cdot Q = X_0; \\ (1,0)\cdot Q\cdot\partial\xi_0 + * + (1,2)\cdot Q\cdot\partial\xi_2 + \cdots + (1,p)\cdot Q = X_1; \\ (2,0)\cdot Q\cdot\partial\xi_0 + (2,1)\cdot Q\cdot\partial\xi_1 + * + \cdots + (2,p)\cdot Q = X_2; \\ \vdots \\ (p-1,0)\cdot Q\cdot\partial\xi_0 + (p-1,1)\cdot Q\cdot\partial\xi_1 + \cdots\cdots + * + (p-1,p)\cdot Q = X_{p-1}; \\ (p,0)\cdot Q\cdot\partial\xi_0 + (p,1)\cdot Q\cdot\partial\xi_1 + \cdots + (p,p-1)\cdot Q\cdot\partial\xi_{p-1} + * = X_p, \end{cases}$$

in welchen Gleichungen die bloßen ∂ Ableitungen nach x_p vorstellen. Diese p+1 einfachen algebraischen Gleichungen müssen nun die p+1 Unbekannten

$Q\cdot\partial\xi_0$; $Q\cdot\partial\xi_1$; $Q\cdot\partial\xi_2$; $Q\cdot\partial\xi_3$; ... $Q\cdot\partial\xi_{p-1}$ und Q

nach den (§.§. 219.—228. d. I. Th. d. S.) liefern. — Denkt man

sich aber die aus diesen p+1 Gleichungen (XVII.) für diese p+1 Unbekannten gefundenen Ausdrücke beziehlich durch

$$\frac{V_0}{N};\ \frac{V_1}{N};\ \frac{V_2}{N};\ \frac{V_3}{N};\ \cdots\ \frac{V_{p-1}}{N}\quad \text{und}\quad \frac{V_p}{N}$$

vorgestellt, so bildet sich, wenn man das in den angeführten (§. §. 219.—228. d. I. Th. d. S.) Gesagte erweitert, der Nenner N, so wie die dazu gehörigen Zähler nach einem bestimmten Gesetz, wie solches in den einfachsten Fällen sogleich in die Augen fällt, und leicht ganz allgemein hingestellt wird. Nach diesem Bildungsgesetz des Nenners N bleibt er aber allemal unverändert, wenn man in den gegebenen Gleichungen (XVII.) die Horizontalreihen und die Vertikalreihen der Koeffizienten mit einander vertauscht. — Wenden wir dies auf unsere Gleichungen (XVII.) an, in denen nach (XIV.) die Koeffizienten in den Vertikalreihen genau die Koeffizienten in den Horizontalreihen, nur mit dem (—) Zeichen versehen, sind, so folgt, da jedes Glied des Nenners N aus p+1 Faktoren besteht, das hier durch diese Vertauschung

$$N \quad \text{in} \quad (-1)^{p+1}\cdot N$$

übergeht, also nur dann N bleibt, wenn $(-1)^{p+1} = +1$, oder $N = 0$ ist. — Also wird N allemal Null, so oft p+1 eine ungerade, d. h. p eine gerade Zahl ist.

Die Reduktion der Gleichung

1) $$X_0\cdot\partial x_0 + X_1\cdot\partial x_1 + X_2\cdot\partial x_2 + \cdots + X_p\cdot\partial X_p = 0$$

zwischen p+1 Veränderlichen, auf diese andere

4) $$A_0\cdot\partial a_0 + A_1\cdot\partial a_1 + A_2\cdot\partial a_2 + \cdots + A_{p-1}\cdot\partial A_{p-1} = 0$$

zwischen nur p Veränderlichen, ist also auf diesem Wege nie möglich, so oft p+1 eine ungerade, d. h. p eine gerade Zahl ist; dagegen im Allgemeinen allemal möglich, so oft p+1 eine gerade also p eine ungerade Zahl ist.

420.

Was nun die Bildung des Nenners N und der zugehörigen Zähler $V_0, V_1, V_2, V_3, \cdots V_p$ betrifft, so findet sich: *)

*) Wir geben dies fast wörtlich aus Jacobi's vorhin angeführter Abhandlung.

I. Für $p+1 = 4$, also $p = 3$:

$$V_0 = \quad * \quad +(2,3)\cdot X_1+(3,1)\cdot X_2+(1,2)\cdot X_3$$
$$V_1 = (3,2)\cdot X_0+ \quad * \quad +(0,3)\cdot X_2+(2,0)\cdot X_3$$
$$V_2 = (1,3)\cdot X_0+(3,0)\cdot X_1+ \quad * \quad +(0,1)\cdot X_3$$
$$V_3 = (2,1)\cdot X_0+(0,2)\cdot X_1+(1,0)\cdot X_2+ \quad *$$

und

$$N = (0,1)\cdot(3,2)+(0,3)\cdot(2,1)+(0,2)\cdot(1,3).$$

II. Für $p+1 = 6$, also $p = 5$,

wenn man der Kürze wegen

$(1,2)\cdot(3,4)+(1,3)\cdot(4,2)+(1,4)\cdot(2,3)$ durch $(1,2,3,4)$

bezeichnet, und nach diesem Schema die ähnlichen Bezeichnungen bildet:

$$V_0 = \quad * \quad +(2,3,4,5)\cdot X_1+(3,4,5,1)\cdot X_2+(4,5,1,2)\cdot X_3+(5,1,2,3)\cdot X_4+(1,2,3,4)\cdot X_5$$

$$V_1 = (3,2,4,5)X_0+ \quad * \quad +(4,3,5,0)\cdot X_2+(5,4,0,2)\cdot X_3+(0,5,2,3)\cdot X_4+(2,0,3,4)\cdot X_5$$

$$V_2 = (1,3,4,5)\cdot X_0+(3,4,5,0)\cdot X_1+ \quad * \quad +(4,5,0,1)\cdot X_3+(5,0,1,3)\cdot X_4+(0,1,3,4)\cdot X_5$$

$$V_3 = (2,1,4,5)\cdot X_0+(4,2,5,0)\cdot X_1+(5,4,0,1)\cdot X_2+ \quad * \quad +(0,5,1,2)\cdot X_4+(1,0,2,4)\cdot X_5$$

$$V_4 = (1,2,3,5)\cdot X_0+(2,3,5,0)\cdot X_1+(3,5,0,1)\cdot X_2+(5,0,1,2)\cdot X_3+ \quad * \quad +(0,1,2,3)\cdot X_5$$

$$V_5 = (2,1,3,4)\cdot X_0+(3,2,4,0)\cdot X_1+(4,3,0,1)\cdot X_2+(0,4,1,2)\cdot X_3+(1,0,2,3)\cdot X_4+ \quad *$$

Sagt man nun: „ein Typus durchlaufe einen Cyclus" wenn statt der Zahlenelemente 0, 1, 2, 3, ··· p, aus denen er gebildet ist, nach einander steht respektive

$$\begin{array}{llllll}
0, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & p-1, \; p \\
1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & p, \quad 0 \\
2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & 0, \quad 1 \\
3, & 4, & 5, & 6, & \cdots, & 1, \quad 2 \\
\vdots & & & & & \\
p-1, & p, & 0, & 1, & \cdots, & p-3, \; p-2 \\
p, & 0, & 1, & 2, & \cdots, & p-2, \; p-1;
\end{array}$$

so läßt sich das Gesetz nach welchem V_m aus einem einzigen seiner Glieder gebildet wird, wie folgt aussprechen:

A. 1) Man lasse aus der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, ···· p, die Zahl m weg.

A. 2) Man lasse das einzige schon als bekannt gedachte Glied, den Zeiger von X mit gerechnet, einen Cyclus durchlaufen, und nehme die Summe aller so entstehenden Glieder, so hat man V_m.

Das Gesetz aber, nach welchem V_{m+1} aus dem schon als bekannt gedachten V_m gefunden wird, ist nachstehendes:

B. 1) Man setze beziehlich 1, 2, 3, ··· p,0 statt 0, 1, 2, 3, ··· p, den Zeiger von X mitgerechnet.

B. 2) Man vertausche in dem so erhaltenen Ausdruck die beiden ersten Zahlen-Elemente mit einander.

So erhält man z. B. aus dem Gliede $(1, 0, 2, 4)\cdot X_5$ in dem obigen V_3, zunächst $(2, 1, 3, 5)\cdot X_0$, und daraus $(1, 2, 3, 5)\cdot X_0$ als ein Glied von V_4.

III. Diese eben angeführten Gesetze gelten auch für $p=p$.— Um daher, wenn p allgemein jede ungerade Zahl ist, die Zähler $V_0, V_1, V_2 \cdots V_p$ nach einem bestimmten Gesetze mechanisch hinschreiben zu können, hat man eigentlich nur noch das erste Glied von V_0 zu bestimmen, weil aus diesem dann nach dem

vorstehenden Gesetze (A.) alle Glieder von V_0, dann aber nach dem Gesetze (B.) nach und nach die Zähler $V_1, V_2, V_3, \cdots V_p$ aus V_0 und aus einander gefunden werden.

Bezeichnet man aber dieses erste Glied von V_0 durch

$$X_1 \cdot (2, 3, 4, 5, \cdots, p-1, p),$$

so wird dieser Koeffizient von X_1 aus $1^{\frac{p-1}{2}}|^2$ Gliedern bestehen. Von diesen $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (p-2)$ Gliedern ist das erste

$$(2,3) \cdot (4,5) \cdot (6,7) \cdots (p-1, p),$$

Die $p-2$ folgenden Glieder erhält man aber hieraus, indem man die letztern $p-2$ Elemente $3, 4, \cdots, p$ einen Cyclus durchlaufen läßt. Aus jedem dieser letztern $p-2$ Glieder leitet man wiederum $p-4$ neue Glieder ab, indem man die letzteren $p-4$ Elemente $5, 6, \cdots, p$ einen Cyclus durchlaufen läßt; u. s. w. f.; bis zuletzt die 3 letztern Elemente $p-2, p-1, p$ einen Cyclus zu durchlaufen haben.

Auf diesem Wege erhält man z. B.

$$\begin{aligned}(2,3,4,5,6,7) = {} & (2,3)\cdot(4,5)\cdot(6,7) + (2,3)\cdot(4,6)\cdot(7,5) + (2,3)\cdot(4,7)\cdot(5,6) \\ & + (2,4)\cdot(5,6)\cdot(7,3) + (2,4)\cdot(5,7)\cdot(3,6) + (2,4)\cdot(5,3)\cdot(6,7) \\ & + (2,5)\cdot(6,7)\cdot(3,4) + (2,5)\cdot(6,3)\cdot(4,7) + (2,5)\cdot(6,4)\cdot(7,3) \\ & + (2,6)\cdot(7,3)\cdot(4,5) + (2,6)\cdot(7,4)\cdot(5,3) + (2,6)\cdot(7,5)\cdot(3,4) \\ & + (2,7)\cdot(3,4)\cdot(5,6) + (2,7)\cdot(3,5)\cdot(6,4) + (2,7)\cdot(3,6)\cdot(4,5).\end{aligned}$$

§. 421.

Ist $p+1$ eine ungerade Zahl, so haben wir gesehen, daß immer zwischen den Koeffizienten der gegebenen Differenzialgleichung

$$X_0 \cdot \partial x_0 + X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + \cdots + X_p \cdot \partial x_p = 0$$

noch eine Bedingungsgleichung statt finden muß, wenn sie auf diese andere

$$A_0 \cdot \partial a_0 + A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + \cdots + A_p \cdot \partial a_p = 0$$

soll reduzirt werden können.

Diese Bedingungsgleichung ist:

I. Für $p+1 = 3$, also $p = 2$:

$$X_0 \cdot (1,2) + X_1 \cdot (2,0) + X_2 \cdot (0,1) = 0,$$

wie wir solche schon (§. 412.) gefunden haben.

II. Für $p+1 = 5$, also $p = 4$ ist sie dagegen:

$$X_0 \cdot (1,2,3,4) + X_1 \cdot (2,3,4,0) + X_2 \cdot (3,4,0,1) + X_3 \cdot (4,0,1,2) + X_4 \cdot (0,1,2,3) = 0.$$

III. Allgemein, wenn $p+1$ eine beliebige ungerade Zahl ist, so wird diese Bedingungsgleichung

$$\Sigma \; X_0 \cdot (1,2,3,4, \cdots, p) = 0,$$

wo das Σ anzeigen soll, daß die Summe aller der Glieder genommen werden soll, welche aus dem ersten $X_0 \cdot (1,2,3,4, \cdots p)$ dadurch hervorgehen, daß man solches einen Cyclus durchlaufen läßt.

§. 422.

Das von Pfaff zuerst hingestellte, von Jacobi noch verallgemeinerte Verfahren, einer Differenzialgleichung von der Form

1) $X_0 \cdot \partial x_0 + X_1 \cdot \partial x_1 + X_2 \cdot \partial x_2 + X_3 \cdot \partial x_3 + \cdots + X_p \cdot \partial x_p = 0$

zwischen $p+1$ Veränderlichen durch die kleinstmögliche Anzahl von Urgleichungen zu genügen und zwar durch $\frac{p+1}{2}$ Urgleichungen, wenn $p+1$ eine gerade Zahl ist, dagegen durch $\frac{p+2}{2}$ Urgleichungen, wenn $p+1$ ungerade ist, besteht nun in folgendem:

I. Wenn $p+1$ eine gerade Zahl $2n$ ist.

A. Man reduzire die Gleichung (1.) erst auf eine andere zwischen nur $2n-1$ Veränderlichen von der Form

2) $A_0 \cdot \partial a_0 + A_1 \cdot \partial a_1 + A_2 \cdot \partial a_2 + \cdots + A_{2n-2} \cdot \partial a_{2n-2} = 0$

wo $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{2n-2}$ Funktionen der $2n$ Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}$ sind, nach (§. §. 419.—421.).

B. Hernach genügt man dieser neuen Gleichung (2.) dadurch, daß man einen dieser neuen Veränderlichen z.B. a_{2n-2} einer Konstante gleich setzt, und die übrige Gleichung zwischen nur $p-1$ Veränderlichen noch dazu nimmt, also die beiden Gleichungen

3) $A_0 \cdot \partial a_0 + A_1 \cdot \partial a_1 + \cdots + A_{2n-3} \cdot \partial a_{2n-3} = 0$

und

4) $a_{2n-2} = C$

in Verein, statt der Gleichung (2.) genommen sich denkt.

C. Die Gleichung (3.) zwischen nur 2n—2 Veränderlichen, da 2n—2 eine gerade Zahl ist, läßt sich nun wieder auf eine andere reduziren zwischen nur 2n—3 Veränderlichen, etwa auf die Gleichung

4) $A'_0 \cdot \partial a'_0 + A'_1 \cdot \partial a'_1 + A'_2 \cdot \partial a'_2 + \cdots + A'_{2n-4} \cdot \partial a'_{2n-4} = 0$,

wo $a'_0, a'_1, a'_2, \cdots a'_{2n-4}$ wiederum Funktionen von $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{2n-3}$, also auch Funktionen von $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{2n-1}$ sind.

D. Dieser Gleichung (4.) genügt man wieder durch die beiden, welche hervorgehen, indem man eine der in ihr vorkommenden Veränderlichen, etwa a'_{2n-4} einer Konstante gleich setzt.

E. Man fährt so fort, und erhält zuletzt, (nachdem man jede Gleichung mit einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen dadurch in 2 Gleichungen zerlegt hat, daß man einen der Veränderlichen einer Konstante gleich setzt, die übrig bleibende Gleichung aber, da sie wieder eine gerade Anzahl von Veränderlichen enthält, auf eine andere reduzirt, welche einen Veränderlichen weniger hat) eine Gleichung zwischen nur zwei Veränderlichen, welche vollends integrirt wird.

F. Dadurch erhält man aber in Allem n Gleichungen von der Form

⊙) $F_1 = C_1;\ F_2 = C_2;\ F_3 = C_3;\ \cdots\cdots F_n = C_n$,

wo $F_1, F_2, F_3, \cdots F_n$ Funktionen der 2n Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{2n-1}$, wo dagegen $C_1, C_2, C_3, \cdots C_n$ n willkührliche Konstanten sind; und diese n Urgleichungen genügen der gegebenen Differenzialgleichung (1.).

G. Hat man aber dieses System von n Urgleichungen (⊙) gefunden, welches der gegebenen Differenzialgleichung zwischen den 2n Veränderlichen genügt, so kann man daraus leicht neue Sy-

steme von n Urgleichungen ableiten, welche statt der Konstanten eine beliebige Anzahl m willkührlicher Funktionen in sich aufnehmen, der gegebenen Differenzialgleichung aber ebenfalls genügen.

Zu dem Ende nimmt man m beliebige der n Funktionen $F_1, F_2, F_3, \cdots F_n$ als willkührliche Funktionen der n—m übrigen derselben, also z. B.

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad F_1 = \psi_1;\quad F_2 = \psi_2;\quad F_3 = \psi_3;\ \cdots\ F_m = \psi_m,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots \psi_m$ ganz willkührliche Funktionen der n—m bestimmten Funktionen $F_{m+1}, F_{m+2}, \cdots F_n$ sind; nimmt diese m Gleichungen ($\mathfrak{C}$) als willkührliche Relationen zwischen den 2n Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{2n-1}$; differenzirt diese, so daß man erhält

$$(\sigma)\cdots \begin{cases} \partial F_1 = \partial(\psi_1)_{F_{m+1}}\cdot\partial F_{m+1} + \cdots + \partial(\psi_1)_{F_n}\cdot\partial F_n; \\ \partial F_2 = \partial(\psi_2)_{F_{m+1}}\cdot\partial F_{m+1} + \cdots + \partial(\psi_2)_{F_n}\cdot\partial F_n; \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \partial F_m = \partial(\psi_m)_{F_{m+1}}\cdot\partial F_{m+1} + \cdots + \partial(\psi_m)_{F_n}\cdot\partial F_n; \end{cases}$$

eliminirt dann aus diesen m Gleichungen (σ) und der gegebenen Differenzialgleichung (1.), nachdem letztere auf die Form

$$5)\quad K_1\cdot\partial F_1 + K_2\cdot\partial F_2 + K_3\cdot\partial F_3 + \cdots + K_n\cdot\partial F_n = 0$$

gebracht ist *), die m Ableitungen $\partial F_1, \partial F_2, \partial F_3, \cdots \partial F_m$; und setzt dann in der entstehenden Eliminationsgleichung, welche die nachstehende Form annehmen wird:

---

*) Diese Umwandlung der Gleichung (1.) in die Form (5.) geschieht allemal wie folgt: Man differenzirt die n Gleichungen ($\odot$) und erhält die n Gleichungen

$$\partial(F_1)_{x_0}\cdot\partial x_0 + \partial(F_1)_{x_1}\cdot\partial x_1 + \cdots + \partial(F_1)_{x_{2m-1}}\cdot\partial x_{2m-1} = 0;$$

$$\partial(F_2)_{x_0}\cdot\partial x_0 + \partial(F_2)_{x_1}\cdot\partial x_1 + \cdots + \partial(F_2)_{x_{2m-1}}\cdot\partial x_{2m-1} = 0;$$

$$\vdots$$

$$\partial(F_n)_{x_0}\cdot\partial x_0 + \partial(F_n)_{x_1}\cdot\partial x_1 + \cdots + \partial(F_n)_{x_{2m-1}}\cdot\partial x_{2m-1} = 0;$$

eliminirt dann aus diesen n Gleichungen und der gegebenen (1.) n der Ableitungen $\partial x_{2n-1}, \partial x_{2n-2}, \cdots \partial x_1, \partial x_0$ mittelst der Methode der

6) $\Pi_1 \cdot \partial F_{m+1} + \Pi_2 \cdot \partial F_{m+2} + \cdots + \Pi_{n-m} \cdot \partial F_n = 0,$

die einzelnen Koeffizienten von ∂F_{m+1}, ···, ∂F_n, der Null gleich; nimmt also noch

$(\mathfrak{C}_1)$··· $\Pi_1 = 0;\ \Pi_2 = 0;\ \Pi_3 = 0;\ \cdots\ \Pi_{n-m} = 0;$

und hat dann mittelst der m Gleichungen $(\mathfrak{C})$, in Verbindung mit den (n—m) Gleichungen $(\mathfrak{C}_1)$, der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügt, also der letzteren wiederum durch n Gleichungen genügt, welche aber m willkührliche Funktionen von n—m bestimmten Funktionen in sich aufgenommen haben.

Nimmt man $m = 1$, so hat man ein System von n Urgleichungen mit einer einzigen willkührlichen Funktion von n—1 bestimmten Funktionen, welches der gegebenen Differenzialgleichung ebenfalls genügt; und dies ist der von Pfaff in der oben angeführten Abhandlung behandelte Fall.

II. Wenn aber $p+1$ eine ungerade Zahl, $= 2n+1$ ist, so bleibt alles daſſelbe wie vorher, wo $p+1 = 2n$ gerade war, nur daß man gleich anfänglich einen der Veränderlichen einer Konstante gleich setzen muß. Man bekommt daher nun $n+1$ Urgleichungen, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen. — Hieher gehört aber für $2n+1 = 5$ das im (§. 416.) und in der (Anmerkung 2 zu §. 416.) beschriebene Verfahren.

§. 423.

Sind aber nach Pfaff und Jacobi diese verschiedenen Systeme von n Urgleichungen gefundeu, welche einer gegebenen Differenzialgleichung zwischen $2n$ oder $2n-1$ Veränderlichen von der Form

---

Multiplikatoren, indem man diese n Differenzialgleichungen beziehlich mit noch Unbestimmten $K_1, K_2, K_3, \cdots K_n$ multiplizirt, zu der gegebenen Differenzialgleichung (2.) addirt, und dann die Koeffizienten von n dieser Ableitungen der 0 gleich setzt. Daraus bestimmen sich dann die n Unbestimmten $K_1, K_2, \cdots K_n$, und die Koeffizienten der n übrigen Ableitungen werden dann von selber der Null gleich, weil der Gleichung (1.) durch die n Gleichungen $(\odot)$ genügt wird.

$$X_0 \cdot \partial x_0 + X_1 \cdot \partial x_1 + \cdots + X_p \cdot \partial x_p = 0$$

genügen, so kann man auch noch, — indem man die im (§. 410.) gelehrte, und in den (§. §. 413. 415. ꝛc.) erweiterte Methode des Monge, mit der eben entwickelten Methode des Pfaff in Verbindung bringt, wie solches bereits in den (§. 417. II. und §. 418. II.) zu sehen ist, — Systeme von $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... ja von p (d. h. von $2n$ oder $2n-1$) Urgleichungen finden, welche willkührliche Konstanten oder willkührliche Funktionen in sich aufgenommen haben, und welche der gegebenen Differenzialgleichung ebenfalls genügen.

Und jene erstern Systeme, welche die geringste Anzahl von Urgleichungen enthalten, so wie diese eben erwähnten, welche aus mehr Urgleichungen bestehen, können nicht mit Recht den Namen von vollständigen oder allgemeinen Integralen führen, weil sie in der That nichts anders liefern, als genügende Werthe.

Unter allen diesen besprochenen Systemen von, der gegebenen Differenzialgleichung genügenden Urgleichungen, sind aber diejenigen Systeme, welche wir (§. §. 416. 417. III. 418. III. und §. 422.) gefunden haben, und welche die geringste Anzahl von Urgleichungen enthalten, als die allgemeinsten anzusehen, weil sie die größeste Zahl der Veränderlichen $x_0, x_1, x_2 \cdots x_p$ als ganz willkührliche Funktionen eines derselben zulassen, d. h. weil sie die größeste Anzahl der Veränderlichen von einander ganz unabhängig lassen.

Zweite Unterabtheilung.

Wenn die gegebene Differenzialgleichung die bis jetzt vorausgesetzte, nach den Ableitungen ∂z, ∂y, ∂x, ꝛc. ꝛc. lineäre Form nicht hat, oder gar nicht von der ersten Ordnung ist.

Vorerinnerung.

Was wir in der vorhergehenden Unterabtheilung für die Gleichungen von der Form

$$Z\cdot\partial z + Y\cdot\partial y + X\cdot\partial x + W\cdot\partial w + \cdots = 0$$

zu leisten gesucht haben, wollen wir nun in einzelnen Beispielen auch für Differenzialgleichungen von einer anderen Form nachzuweisen versuchen.

§. 424.

I. Ist gegeben die Gleichung der ersten Ordnung

1) $$\partial z^2 = m^2\cdot(\partial x^2 + \partial y^2);$$

integrirt man sie unter der Voraussetzung, daß x konstant und $\partial x = 0$ ist, so giebt sie

2) $\partial z = \pm m\cdot\partial y$; also 3) $z = \pm m\cdot y + C_x$.

Nimmt man nun diese Gleichung (3.) als neue willkührlich angenommene Relation zwischen z, y und x, noch zu der gegebenen Gleichung (1.) hinzu, eliminirt man dann aus beiden Gleichungen (1. und 3.) jede Spur von z (nach §. 281. d. V. Th. d. S.); so erhält man

4) $$\pm 2m\cdot\partial y\cdot\partial C_x = (m^2 - \partial C_x^2)\cdot\partial x,$$

woraus ∂y und dann auch y hervorgeht, nämlich

5) $$y = \pm\tfrac{1}{2}m\cdot\int\frac{1}{\partial C_x}\cdot dx \mp \frac{1}{2m}\cdot C_x.$$

Das System der beiden Gleichungen (3. und 5.), nämlich

$$(\odot)\cdots\quad z = \pm(my + \varphi_x) \quad\text{und}\quad 2y = m\cdot\int\frac{1}{\partial\varphi^x}\cdot dx - \frac{1}{m}\cdot\varphi_x,$$

wo φ_x (statt $\pm C_x$) eine ganz willkührliche Funktion von x vorstellt, genügt also der gegebenen Differenzialgleichung

1) $$\partial z^2 = m^2(\partial x^2 + \partial y^2).$$

§. 425.

Man sieht aber zu gleicher Zeit leicht ein, wie derselben Differenzialgleichung, besonders wenn man neue Veränderliche einführen will, noch unendlich viele andere Systeme zweier Gleichungen genügen können. — Ohne neue Veränderliche einzuführen hat man folgende Methode hervorgehoben.

Zuerst verschafft man sich bloß genügende Werthe; man setzt zu dem Ende

6) $x = a \cdot z + b$ und 7) $y = \alpha \cdot z + c$,

wo a, b, α, c konstant gedacht sind, so daß

8) $\partial x = a \cdot \partial z$; 9) $\partial y = \alpha \cdot \partial z$

wird; und die Gleichung (1.) geht dadurch über in folgende

10) $$1 = m^2 \cdot (a^2 + \alpha^2).$$

Dieselbe wird also durch das System der beiden Gleichungen (6. und 7.) identisch, wenn man zwischen den Konstanten α und a die Relation (10.) festsetzt, d. h. wenn man

11) $$\alpha = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{1 - m^2 \cdot a^2}$$

nimmt.

Hat man nun diese genügenden Werthe mit 3 Konstanten gefunden, so denkt man sich nun unter a, b, c wiederum Funktionen desselben Veränderlichen t, von welchem hier x, y, z als Funktionen gedacht sind, und zwar diejenigen, für welche die Differenziale der genügenden Gleichungen (6. und 7.) d. h. die Gleichungen (8. und 9.) unverändert dieselben bleiben, also welche die beiden Gleichungen

12) $z \cdot \partial a + \partial b = 0$ und 13) $z \cdot \partial \alpha + \partial c = 0$

identisch machen, so hat man wiederum in (6. und 7.) ein System zweier, der Gleichung (1.) genügender Gleichungen, wenn

man wieder α wie in (10.) nimmt, so daß

14) $$\partial\alpha = -\frac{ma\cdot\partial a}{\sqrt{1-m^2\cdot a^2}}$$

genommen werden muß. Weil aber zur Bestimmung dieser 3 Funktionen a, b, c von t nur die beiden Gleichungen (12. u. 13.) gegeben sind, d. h. die Gleichungen

15) $z\cdot\partial a+\partial b = 0$ und 16) $$-\frac{mz\cdot a\cdot\partial a}{\sqrt{1-m^2\cdot a^2}}+\partial c = 0,$$

so bleibt eine davon ganz willkührlich, so daß zwei derselben Funktionen der dritten werden.

Setzt man, der letztern Andeutung zufolge,

17) $a = \varphi_b$; 18) $c = \psi_b$;

so wird das System der 4 Gleichungen (6. 7. 15. u. 16.), nämlich der 4 Gleichungen

18) $$\frac{x-b}{z}-\varphi_b = 0;$$

19) $$\frac{y-\psi_b}{z}-\frac{1}{m}\cdot\sqrt{1-m^2\cdot\left(\frac{x-b}{z}\right)^2} = 0;$$

20) $$-\frac{1}{z}-\partial\varphi_b = 0;$$

21) $$-\partial\psi_b-\frac{m\cdot\frac{x-b}{z}}{\sqrt{1-m^2\cdot\left(\frac{x-b}{z}\right)^2}} = 0,$$

[wo die Gleichungen (20. u. 21.) nichts anders sind, als die Ableitungen der Gleichungen (18. u. 19.) (oder der Gleichungen 6. und 7.) nach allem b], der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügen. Eliminirt man aber aus (18. u. 21.) den Ausdruck $\frac{x-b}{z}$, so erhält man eine Gleichung zwischen $\partial\psi_b$ und φ_b, so daß man φ_b in $\partial\psi_b$, also $\partial\varphi_b$ in $\partial^2\psi_b$ ausdrücken kann, und demnach, wenn in (18.) dieser Werth statt φ_b gesetzt wird,

diese (18.) von der (21.) nicht mehr verschieden ist. — Man wird dann als ein System von Gleichungen, welche der (1.) genügen, die 3 Gleichungen (19.), (21.) und (20.) haben. Dabei ist, wenn die (19.) durch $U = 0$ vorgestellt wird, die (21.) nichts anders als $\partial U_{(b)} = 0$; und die (20.) dann nothwendig $\partial^2 U_{(b)} = 0$, während in allen dreien die willkührliche Funktion ψ_b ganz allein noch vorkommt. Partikularisirt man nun diese letztere, und eliminirt man dann jedesmal b aus den drei Gleichungen

$$U = 0, \quad \partial U_{(b)} = 0 \text{ und } \partial^2 U_{(b)} = 0,$$

so erhält man jedesmal zwei Gleichungen zwischen x, y und z, welche der gegebenen Gleichung (1.) genügen.

Monge hat auf diesem Wege auch die allgemeinere Gleichung

$$\text{I.} \qquad \partial x_z = f_{\partial y_z} \text{ oder } F_{\partial x_z, \partial y_z} = 0,$$

wo f oder F ganz willkührliche Funktionen der unten rechts angehängten Ausdrücke vorstellen, behandelt.

Man findet ohne alle Schwierigkeit die drei Gleichungen

$$\text{II.} \qquad U = 0; \quad \partial U_{(b)} = 0; \quad \partial^2 U_{(b)} = 0,$$

welche der 1. genügen, und in welchen U die Funktion

$$\frac{y - \psi_b}{z} - f_{\frac{x-b}{z}} \text{ oder } F_{\frac{x-b}{z}, \frac{y-\psi_b}{z}}$$

vorstellt.

Anmerkung. Man kann auch, wenn man zwei genügende Urgleichungen mit 3 willkührlichen Konstanten hat, solche allgebraisch mit einander verbinden, und so unendlich viele Paare genügender Urgleichungen finden, in denen dieselben 3 willkührlichen Konstanten auf mannichfache Art mit einander verbunden erscheinen können. — Je zwei dieser Gleichungen geben für y und z immer dieselben Funktionen von x; sie sind daher nicht als neue Gleichungen anzusehen, aber sie gewähren immer neue Formen, auf welche die Methode des (§. 425.) weiter angewandt werden kann, so daß man dadurch auch immer zu neuen Formen der allgemeinern Systeme genügender Gleichungen geführt wird.

Denkt man z. B. daran, daß

$$\partial x^2+\partial y^2 = \partial x^2\cdot(Sin\,\omega^2+Cos\,\omega^2)+\partial y^2\cdot(Sin\,\omega^2+Cos\,\omega^2)$$
$$=(\partial x\cdot Sin\,\omega+\partial y\cdot Cos\,\omega)^2+(\partial x\cdot Cos\,\omega+\partial y\cdot Sin\,\omega)^2$$

ist, so wird man versucht, zur gegebenen Differenzialgleichung

$$1)\qquad \partial z^2 = m^2\cdot(\partial x^2+\partial y^2)$$

noch die beliebige Abhängigkeit

$$\partial x\cdot Cos\,\omega+\partial y\cdot Sin\,\omega = 0$$

oder $$2)\qquad x\cdot Cos\,\omega+y\cdot Sin\,\omega = a'$$

hinzuzufügen, so daß sich dann aus (1.) noch ergiebt

$$\partial z^2 = m^2\cdot(\partial y\cdot Cos\,\omega-\partial x\cdot Sin\,\omega)^2$$

d. h. $$3)\qquad \partial z = m\cdot(\partial y\cdot Cos\,\omega-\partial x\cdot Sin\,\omega),$$

also $$4)\qquad z = m\cdot(y\cdot Cos\,\omega-x\cdot Sin\,\omega+b').$$

Das System der beiden Urgleichungen (2. und 4.) genügt daher der gegebenen Differenzialgleichung (1.) ebenfalls. Allein die Gleichung (2.) erhält man auch, wenn man aus den beiden im (§. 425.) gefundenen Gleichungen (6. u. 7.), nämlich aus den Gleichungen

$$x = a\cdot z+b \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{m}\cdot z\cdot\sqrt{1-m^2\cdot a^2}+c,$$

den Veränderlichen z eliminirt, zugleich aber die neuen Konstanten ω und a' so einführt, daß

$$\text{tg}\,\omega = \frac{-ma}{\sqrt{1-m^2a^2}} \quad \text{und} \quad a' = \left(\frac{b}{m}\cdot\sqrt{1-m^2a^2}-ac\right)\cdot Cos\,\omega$$

wird. — Die Gleichung (4.) ist dann ebenfalls eine algebraische Kombination derselben zwei, im (§. 425.) als genügend gefundenen Gleichungen.

Geht man aber nun von diesen jetzigen Gleichungen (2. und 4.) aus, um nach der Methode des (§. 425.) Systeme von zwei allgemeineren Urgleichungen zu finden, welche allemal der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügen, so liefert jene Methode, wenn man a_ω, b_ω statt a', b' setzt, die 3 Gleichungen

$$U = 0; \qquad \partial U_{(\omega)} = 0; \qquad \partial^2 U_{(\omega)} = 0,$$

wenn $U = z - m \cdot y \cdot Cos\,\omega + mx \cdot Sin\,\omega - m \cdot a_\omega$ ist; also die 3 Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{rl} z - m \cdot y\, Cos\,\omega + mx \cdot Sin\,\omega - m \cdot a_\omega &= 0 \\ y \cdot Sin\,\omega + x \cdot Cos\,\omega - \partial a_\omega &= 0 \\ y \cdot Cos\,\omega - x \cdot Sin\,\omega - \partial^2 a_\omega &= 0 \end{array}\right\},$$

in denen a_ω jede willkührliche Funktion von ω ist, und welche unzählich viele Paare zusammengehöriger Gleichungen zwischen x, y und z liefern (von denen jedes Paar der gegebenen Differenzialgleichung genügt), sobald man nur die Funktion a_ω immer anders und anders annimmt, und dann aus den drei Gleichungen jedesmal ω eliminirt. *)

§. 426.

Man kann aber den Geist dieses im (§. 425.) beschriebenen Verfahrens, wie folgt allgemein hervorheben.

Hat man nämlich zwei Urgleichungen mit 3 willkührlichen Konstanten a, b, c, welche einer gegebenen Differenzialgleichung der ersten Ordnung

$$1) \qquad F_{x,y,z,x_1,y_1,z_1} = 0$$

genügen, z. B. die beiden Gleichungen

$$2) \quad G_{x,y,z,a,b,c} = 0 \qquad \text{und} \qquad 3) \quad H_{x,y,z,a,b,c} = 0,$$

so folgt, daß man zur Gleichung $F = 0$ allemal gelangen muß, wenn man aus den Gleichungen (2. und 3.) und aus ihren Differenzialgleichungen

---

*) Ist x die Abeisse, y die rechtwinklige Ordinate und z der Bogen, so hat man

$$\partial z^2 = \partial x^2 + \partial y^2.$$

Die hier so eben gefundenen 3 Gleichungen geben daher für $m = 1$ eine unendliche Menge von Kurven, für welche der Bogen z bereits in x und y ausgedrückt ist, und welche man deshalb rektifizirbare Kurven nennt. — Ist z in x und y algebraisch ausgedrückt, so nennt man die Kurven algebraisch rektifizirbare.

Mit dem Problem, rektifizirbare Kurven zu finden, hat man sich aber viel beschäftigt, und man findet verschiedene Auflösungen desselben in dem Vten Bande der neuen Petersburger Kommentarien.

4) $\partial G = 0$, d. h. $\partial G_x \cdot \partial x + \partial G_y \cdot \partial y + \partial G_z \cdot \partial z = 0$

und 5) $\partial H = 0$, d. h. $\partial H_x \cdot \partial x + \partial H_y \cdot \partial y + \partial H_z \cdot \partial z = 0$,

die 3 Konstanten a, b, c eliminirt. — Denkt man sich daher a, b, c ebenfalls, so wie x, y und z als Funktionen von t, so aber, daß die Gleichungen (4.) und (5.) genau dieselben bleiben, und dies ist der Fall, wenn man a, b, c so nimmt, daß

6) $\partial G_a \cdot \partial a + \partial G_b \cdot \partial b + \partial G_c \cdot \partial c = 0$

und 7) $\partial H_a \cdot \partial a + \partial H_b \cdot \partial b + \partial H_c \cdot \partial c = 0$

wird; so folgt, daß die Gleichungen (2. und 3.) der Gleichung (1.) oder $F = 0$ noch immer genügen müssen. Denkt man sich daher nun unter b und c Funktionen von a etwa b_a und c_a, so daß $\partial b = \partial b_a \cdot \partial a$ und $\partial c = \partial c_a \cdot \partial a$ wird, so gehen die Gleichungen (6. und 7.) in folgende über, nämlich in

8) $\partial G_{(a)} = 0$. d. h. $\partial G_a + \partial G_b \cdot \partial b_a + \partial G_c \cdot \partial c_a = 0$

und 9) $\partial H_{(a)} = 0$. d. h. $\partial H_a + \partial H_b \cdot \partial b_a + \partial H_c \cdot \partial c_a = 0$.

Gelingt es nun, aus den 4 Gleichungen (2. 3. 8. und 9.) jede Spur von c oder c_a zu elimiiren, so erhält man 3 Gleichungen zwischen x, y, z, a und der einzigen ganz willkührlichen Funktion b_a von a, aus denen dann (wenn man diese Funktion b_a immer anders und anders nimmt, und jedesmal a aus den 3 Gleichungen eliminirt) unzählich viele Paare zusammengehöriger Urgleichungen zwischen x, y und z hervorgehen, welche der gegebenen Differenzialgleichung $F = 0$ genügen.

In dem bisher (im §. 425 und in seiner Anmerkung) betrachteten Falle konnte man aus einer Vereinigung der Gleichungen $G = 0$ und $\partial H_{(a)} = 0$ *) sogleich eine Gleichung ableiten zwischen c_a und ∂b_a, so daß man sogleich c_a in ∂b_a ausdrücken konnte. Setzte man dann in die Gleichung $G = 0$, statt c_a diesen Werth (in ∂b_a ausgedrückt), so ging sie über in die andere $\partial H_{(a)} = 0$, während dann die Gleichung $\partial G_{(a)} = 0$

---

*) Wo hier a gesetzt ist, war dort b geschrieben; dies hat jedoch auf die Identität der Methode keinen Einfluß.

unter derselben Voraussetzung in $\partial^2 H_{(a)} = 0$ überging, so daß das System der 3 Gleichungen

$$H = 0; \quad \partial H_{(a)} = 0; \quad \partial^2 H_{(a)} = 0$$

daraus hervorging, welches nur die einzige willkührliche Funktion b_a (und ihre Ableitungen ∂b_a, $\partial^2 b_a$) enthielt, und welches, wenn man a eliminirt sich denkt, allemal ein der gegebenen Differenzialgleichung genügendes Paar von Urgleichungen zwischen x, y und z liefert.

Was aber hier H ist, wurde dort durch U bezeichnet.

Anmerkg. Da der Erfolg der ganzen Methode davon abhängt, daß man aus den 4 Gleichungen

$$G = 0, \quad H = 0, \quad \partial G_{(a)} = 0, \quad \partial H_{(a)} = 0$$

eine Gleichung bloß zwischen b, c und a erhalte, noch dazu so, daß c sich in a und b ausdrücken läßt; so kann man zuweilen durch eine glückliche Umformung der Gleichungen $G = 0$ und $H = 0$, etwa nach der Anmerkg. zu (§. 425.), dadurch daß man neue Konstanten einführt, den Erfolg der Methode sichern, der ausserdem nicht erreicht werden zu können scheint.

Es sey z. B. gegeben die Differenzialgleichung

$$1) \quad (y \cdot \partial x - x \cdot \partial y)^2 + (z \cdot \partial x - x \cdot \partial z)^2 + (y \cdot \partial z - z \cdot \partial y)^2 = m^2 \cdot (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2),$$

und man habe für sie die beiden genügenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & ax + by + z \cdot \sqrt{m^2 - a^2 - b^2} = m \\ \text{und} \quad 3) & x - a = c \cdot (y - b) \end{array}\right\}$$

gefunden.

Denkt man sich nun a, b, c als veränderlich aber so, daß die Differenziale der beiden Gleichungen (2. und 3.) dieselben bleiben, wie vorher, wo jene konstant waren, so erhält man

$$4) \quad x \cdot \partial a + y \cdot \partial b - \frac{z \cdot (a \cdot \partial a + b \cdot \partial b)}{\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}} = 0$$

und 5) $$-\partial a = (y - b) \cdot \partial c - c \cdot \partial b. \; *)$$

*) Genügt man der Gleichung (4.) dadurch, daß man die Koeffi-

Diese Gleichungen (4. und 5.) sind nun die (6. und 7. des §. 426.), und sogleich ergeben sich, wenn $\partial b = \partial b_a \cdot \partial a$ und $\partial c = \partial c_a \cdot \partial a$ gesetzt wird, die Gleichungen, welche den Nummern (8. und 9. des §. 426.) analog sind.

Weil man aber hier nicht sogleich sieht, wie c_a in b_a ausgedrückt werden kann, so führt man lieber statt a und b jetzt a′ und b′ ein, gegeben durch die Gleichungen

6) $a = a' \cdot \sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$; 7) $b = b' \cdot \sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$.

Dadurch gehen die Gleichungen (2. und 3.) in diese

8) $$a' \cdot x + b' \cdot y + z = m \cdot \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}$$

und

9) $$x - \frac{a'm}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}} = c \cdot \left(y - \frac{b'm}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}} \right)$$

über. Betrachtet man nun hier a′, b′, c als veränderlich, doch so, daß die Differenziale der Gleichungen (8. und 9.) dieselben

---

zienten von ∂a und ∂b einzeln der Null gleich setzt, so findet man, daß die daraus (in Verbindung mit der 2.) hervorgehenden Werthe

$$a = x; \quad b = y; \quad z = \sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$$

auch den Gleichungen (3. und 5.) genügen, so daß man eine einzige Gleichung

$$z = \sqrt{m^2 - x^2 - y^2} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = m^2,$$

als der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügend gefunden hat.

Diese einzige Gleichuug

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2,$$

welche hier nur wie durch Zufall gefunden worden ist, würde man aber direkt gefunden haben, wenn man nach Anleitung der (§. §. 400. und 402.) die Bedingungsgleichung der Integrabilität aufgesucht hätte. Man würde sie dann nicht identisch $0 = 0$, sondern man würde eine Gleichung zwischen x, y und z selbst gefunden haben; und hätte man dann nach Anleitung des (§. 404. II.) untersucht, ob diese Gleichung mit der gegebenen Differenzialgleichung stimmt, so würde man zu dem genügenden Resultat

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2$$

gelangt seyn.

bleiben wie vorher, wo jene konstant gedacht waren, und setzt man noch $b' = \varphi_{a'}$ und $c = \psi_{a'}$, so erhält man die 4 Gleichungen

$$10) \qquad a' \cdot x + y \cdot \varphi_{a'} + z = m \cdot \sqrt{1 + a'^2 + \varphi_{a'}^2};$$

$$11) \qquad x - y \cdot \psi_{a'} = \frac{m \cdot [a' - \psi_{a'} \cdot \varphi_{a'}]}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi_{a'}^2}};$$

$$12) \qquad x + y \cdot \partial\varphi_{a'} = \frac{m \cdot [a' + \varphi_{a'} \cdot \partial\varphi_{a'}]}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi_{a'}^2}};$$

$$13) \qquad -y \cdot \partial\psi_{a'} = m \cdot \partial\left(\frac{a' - \psi_{a'} \cdot \varphi_{a'}}{\sqrt{1 + a'^2 + \varphi_{a'}^2}}\right)_{(a')};$$

wo die (12. und 13.) nichts anders sind, als die Ableitungen der Gleichungen (10. und 11.) nach allem a'.

Nimmt man nun $\psi_{a'} = -\partial\varphi_{a'}$, so fallen die Gleichungen (11. und 12.) in eine einzige zusammen; es wird überdies

$$\partial\psi_{a'} = -\partial^2\varphi_{a'}$$

und wenn man die erstere dieser 4 Gleichungen, nämlich die (10.) auf die Form $U = 0$ bringt, so nehmen die übrigen die Form $\partial U_{(a')} = 0$ und $\partial^2 U_{(a')} = 0$ an, so daß, wenn man die Konstante a' aus den 3 Gleichungen

$$U = 0; \qquad \partial U_{(a')} = 0; \qquad \partial^2 U_{(a')} = 0$$

eliminirt, während $\psi_{a'}$ jede beliebige Funktion von a' vorstellt, allemal zwei Gleichungen zwischen x, y und z sich ergeben, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

§. 427.

Aehnliches kann man aber auch bei gegebenen totalen Differenzialgleichungen der 2ten und höhern Ordnung zwischen drei Veränderlichen versuchen.

Es sey z. B. gegeben die Gleichung

$$1) \qquad M \cdot \partial^2 x + N \cdot \partial^2 y + P \cdot \partial x^2 = Q,$$

wo sich alle bloßen ∂ auf einen Veränderlichen z beziehen, wäh-

rend M, N, P solche Funktionen von x, y, z, x_1 oder ∂x und y_1 oder ∂y sind, daß diese andere Gleichung

2) $$M\cdot\partial^2 x+N\cdot\partial^2 y+P\cdot\partial x^2=0$$

unter der Voraussetzung, daß z selbst als konstant gedacht wird, einen integrirenden Faktor μ habe, so daß

3) $$\int\mu\cdot(M\cdot\partial^2 x+N\cdot\partial^2 y+P\cdot\partial x^2)\cdot dz=U'$$

d. h.

4) $$\partial U'_{x_1}\cdot\partial^2 x+\partial U'_{y_1}\cdot\partial^2 y+\partial U'_x\cdot\partial x+\partial U'_y\cdot\partial y = \mu M\cdot\partial^2 x+\mu N\cdot\partial^2 y+\mu P\cdot\partial x^2=\mu\cdot Q$$

wird. —

Man nehme nun als neu hinzutretende Relation zwischen x, y und z, die Gleichung

5) $$U'=\partial\varphi_z.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung (5.) nach allem z, also auch nach dem explizit in U', so wie nach dem in $\partial\varphi_z$ vorkommenden z; so erhält man, wenn man von dieser Differenzialgleichung

6) $$\partial U'_{x_1}\cdot\partial^2 x+\partial U'_{y_1}\cdot\partial^2 y+\partial U'_x\cdot\partial x+\partial U'_y\cdot\partial y+\partial U'_z=\partial^2\varphi_z$$

die Gleichung (4.) subtrahirt, sogleich

7) $$\partial U'_z=\partial^2\varphi_z-\mu\cdot Q.$$

Das System der beiden Gleichungen

8) $$U'=\partial\varphi_z \quad\text{und}\quad \partial U'_z=\partial^2\varphi_z-\mu Q$$

genügt also der gegebenen Differenzialgleichung (1.), welche Funktion φ_z auch immer genommen werden mag.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$z\cdot\partial^2 x-2\partial y\cdot\partial^2 y=z,$$

so erhält man das System der beiden Gleichungen

$$z\cdot\partial x-\partial y^2=\partial\varphi_z \quad\text{und}\quad \partial x=\partial^2\varphi_z-z,$$

welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen, was für eine Funktion von z auch immer statt φ_z gesetzt werden mag.

Kann man nun aus den beiden Gleichungen (8.) zwei neue

Gleichungen ableiten, welche als Gleichungen zwischen den 4 Veränderlichen x, y, z und φ, integrabel sind, so erhält man zwei Urgleichungen zwischen x, y, z und φ, welche der gegebenen Differenzialgleichung (1.) genügen, was für eine Funktion φ^z auch immer statt z gesetzt werden mag.

In dem vorliegenden Beispiele läßt sich die zweite der genügenden Gleichungen augenblicklich integriren, und giebt

$$2x = 2\cdot\partial\varphi_z - z^2.$$

Eliminirt man aber aus beiden genügenden Gleichungen die Ableitung ∂x, so erhält man

$$\partial y = \sqrt{z\cdot\partial^2\varphi_z - \partial\varphi_z - z^2}.$$

Also hat man die beiden Urgleichungen

$$2x = 2\cdot\partial\varphi_z - z^2 \quad \text{und} \quad y = \int(\sqrt{z\cdot\partial^2\varphi_z - \partial\varphi_z - z^2})\cdot dz,$$

welche der gegebenen Differenzialgleichung genügen.

II. Man habe noch die Gleichung der 2ten Ordnung

$$2)\quad M\cdot\partial^2 x + N\cdot\partial^2 y + P\cdot\partial x^2 + Q\cdot\partial x\cdot\partial y + R\cdot\partial y^2 = 0,$$

wo alle Ableitungen auf z sich beziehen, während M, N, P, Q, R bloß Funktionen von x und y seyn sollen.

Sucht man für

$$2)\quad M\cdot\partial x + N\cdot\partial y$$

den integrirenden Faktor μ; findet man dann

$$3)\quad \int(\mu M\cdot\partial x + \mu N\cdot\partial y)\cdot dz = U_{x,y};$$

und nimmt man die Gleichung

$$4)\quad U = \varphi_z$$

als eine willkührliche Abhängigkeit noch zur (1.) hinzu: so kann man, wenn die (4.) zweimal hinter einander differenziirt wird, aus der Gleichung (1.) die Ableitungen der 2ten Ordnung eliminiren, so daß man

$$5)\quad [\partial(\mu M)_x - \mu P]\cdot\partial x^2 + [\partial(\mu M)_y + \partial(\mu N)_x - \mu Q]\cdot\partial x\cdot\partial y + [\partial(\mu N)_y - \mu R]\cdot\partial y^2 = \partial^2\varphi_z$$

erhält. Das System der beiden Gleichungen (4. und 5.) ge-

nügt also der gegebenen Differenzialgleichung der 2ten Ordnung, während die Gleichung (4.) eine Urgleichung, die (5.) dagegen nur von der 1sten Ordnung ist.

Anmerkg. Wir beschließen diese Untersuchungen der 2ten Abtheilung dieses Kapitels mit der Bemerkung, daß sie zu denen gehören, welche in allen Theilen der Analysis, so wie schon in den Elementen der Algebra erscheinen, und in denen Aufgaben gelößt werden sollen, welche im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen zulassen, während die Anzahl dieser Auflösungen durch Nebenbedingnngen, welche jedoch nicht in Gleichung gestellt werden können, wiederum sehr beschränkt werden kann, so daß öfters nur sehr wenige, manchmal nur eine einzige, ja zuweilen gar keine Auflösung existirt, welche allen Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten könnte.

Werden alle Untersuchungen der Art zusammengestellt, so erhält man dasjenige, was gewöhnlich unbestimmte Analysis genannt wird.

Hinsichtlich der hier besprochenen Untersuchungen der Art findet man übrigens in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1784 die sehr interressanten Arbeiten von Monge, welcher überhaupt zuerst auf das Dasein solcher Fragen aufmerksam gemacht hat.

Schlußanmerkung zum 6ten Theile.

Es bleibt uns nun, nachdem die Integration der totalen Differenzialgleichungen mit beliebig viel Veränderlichen in endlicher Form, so weit, als es in unserem Zwecke liegen konnte, entwickelt ist, noch übrig, die so wichtige Integration der Parzialgleichungen in endlicher Form vorzunehmen. Damit werden sich daher nun die nächsten zwei Kapitel zu beschäftigen haben, welche den Anfang und einen Abschnitt des nächsten 7ten Theils dieses Systems bilden.

Gedruckt bei den Gebr. Unger.

Von demselben Verfasser erschienen eben daselbst:

Ohm, Prof. Dr. M., Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. 1ster Theil enthaltend
Niedere Analysis 1ster Theil. gr. 8. 1828. . 2 Thlr.

2ter Theil enthaltend
Niedere Analysis 2ter Theil. gr. 8. 1829. . 2 Thlr.

3ter Theil enthaltend
Höhere Analysis 1ster Theil. gr. 8. 1829. . 2 Thlr.

4ter Theil enthaltend
Höhere Analysis 2ter Theil. gr. 8. 1830. . 2 Thlr.

5ter Theil enthaltend
Höhere Analysis 3ter Theil. gr. 8. 1831. 2 Thlr. 6 gGr.

— Versuch einer kurzen, gründlichen und deutlichen auch Nichtmathematikern verständlichen Anweisung, 10—14jährige Knaben zum Studium der Mathematik fähig zu machen. gr. 8. 1827. . . . . 1 Thlr.

— Die reine Elementar-Mathematik. 3 Thle. gr. 8. 1825—26. . . 6 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr. (6 Thlr. 6 gGr.)
(I. 2 Thlr. 6 gGr. II. 2 Thlr. III. 2 Thlr.)

— Die analytische und höhere Geometrie. Erste Fortsetz. der Elementar-Mathematik. gr. 8. 1826. . 2 Thlr.

— Die Lehre vom Größten und Kleinsten. gr. 8. 1825. 1 Thlr. $22\frac{1}{2}$ Sgr. (1 Thlr. 18 gGr.)

— Elementar-Geometrie und Trigonometrie. 8. 1819. 15 Sgr. (12 gGr.)

— Zwei Abhandlungen.

a) Mittheilung einer neuen analytischen Entdeckung.

b) Ein Beitrag zur richtigern Beurtheilung der schriftstellerischen Arbeiten des Herrn Professors Dirksen zu Berlin. gr. 8. 1831. geh. . . . 5 Sgr.

Im Jahre 1832 erschienen bei C. H. Jonas.

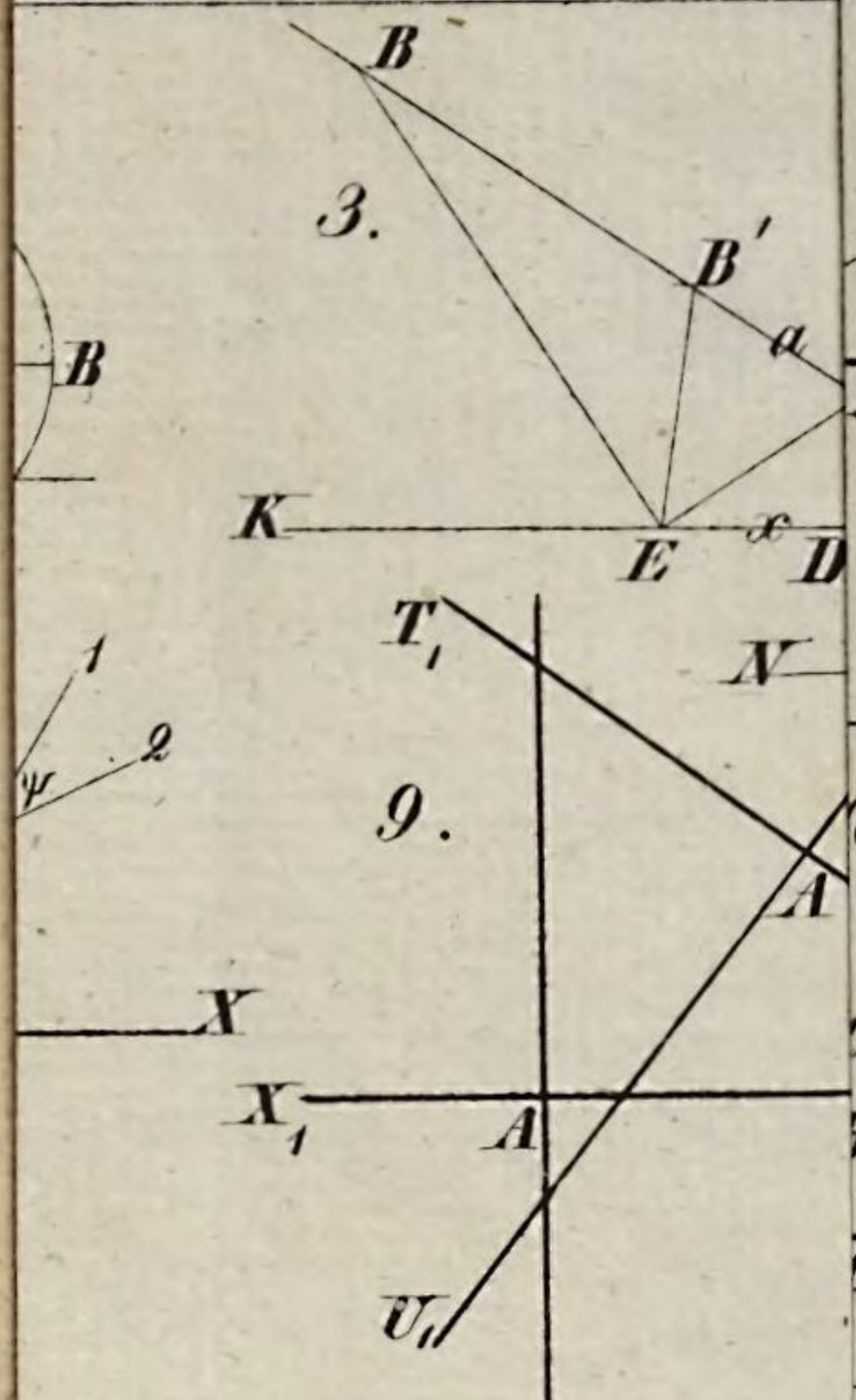
Ascherson, Dr. F. M. De fistulis colli congenitis. 4to 1832. . . . . 12½ Sgr.

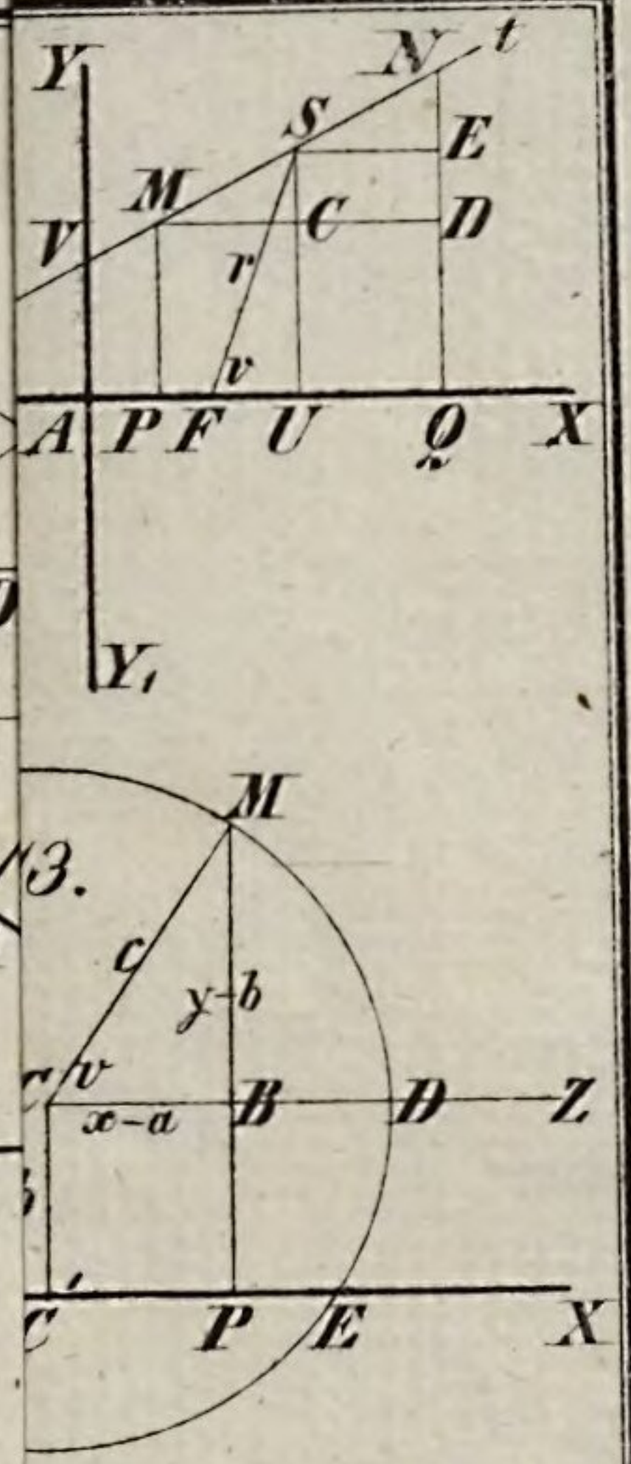
Gräfe, A. W. Der Besuch in dem Pfarrhause zu Friedheim. 8. 1832. . . . . 5 Sgr.

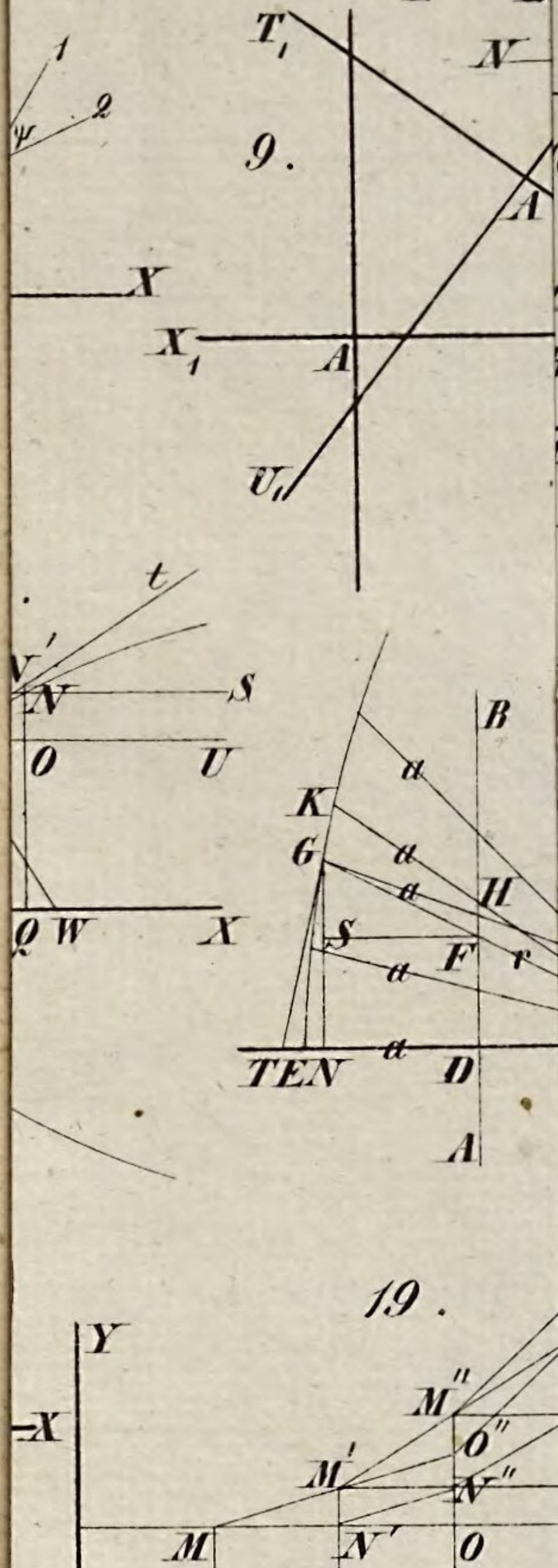
Werke des chinesischen Weisen Khung-fu-dsii, von Dr. W. Schott. 2r Theil 8. 1832. . . 1 Rthlr.

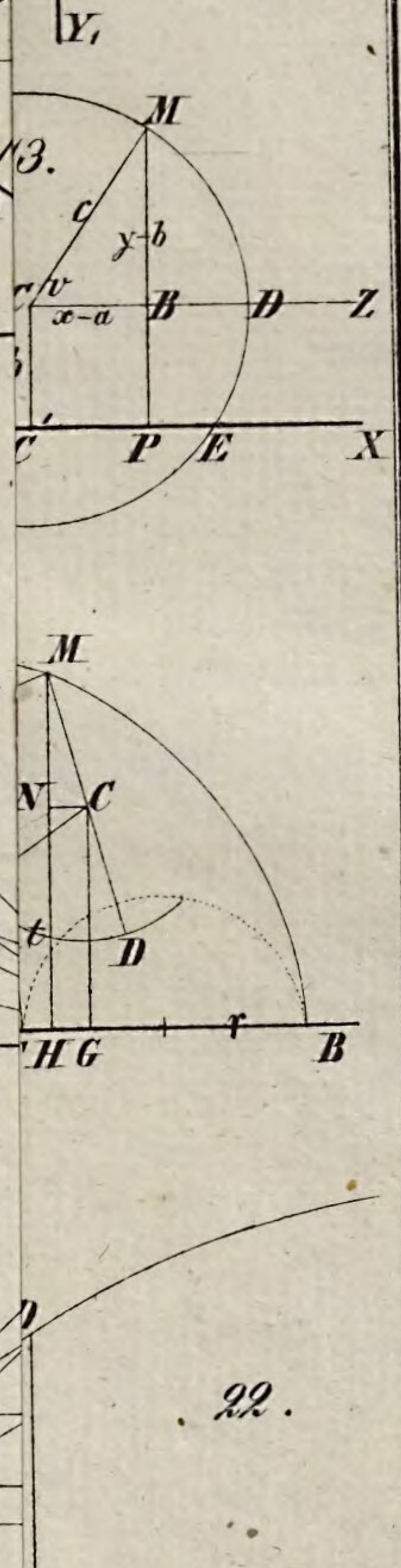
Pochhammer, G. C. A. Reg. Rath. Handbuch zur vollständigen Kenntniß der Zoll-Verfassung und Verwaltung in den Königl. Preußischen Staaten. 2 Thle. 8. geh. 1832. 5 Rthlr.

3.

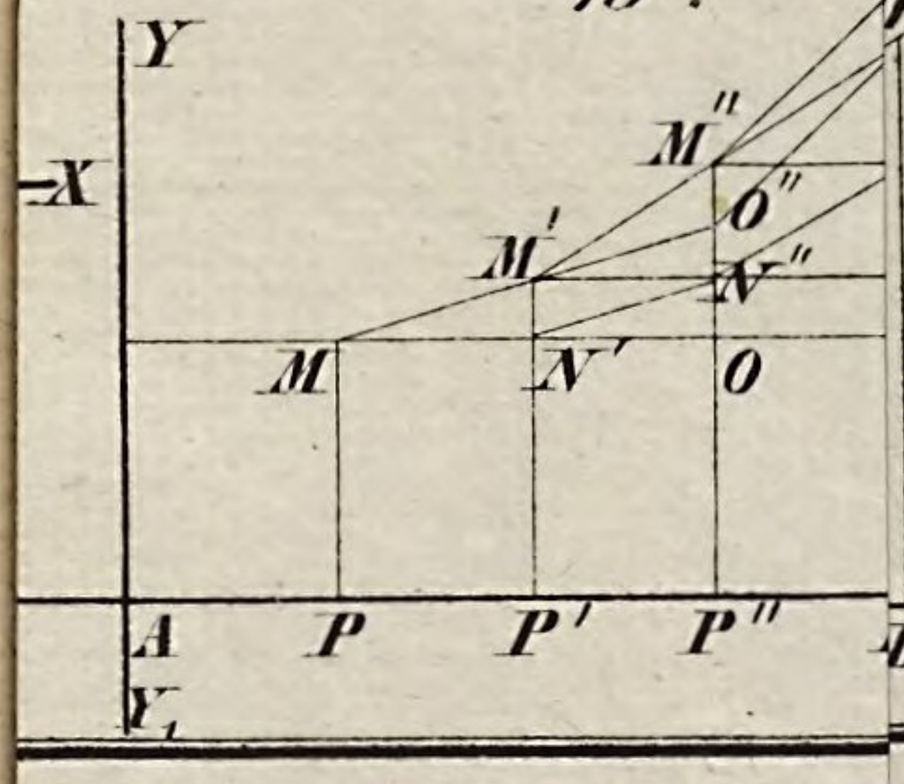

B
B'
a
K
E
x
D
B
T1
N
1
2
ψ
9.
A
X
X1
A
U1


Y
N
t
S
E
M
C
D
V
r
v
A
P
F
U
Q
X
Y1

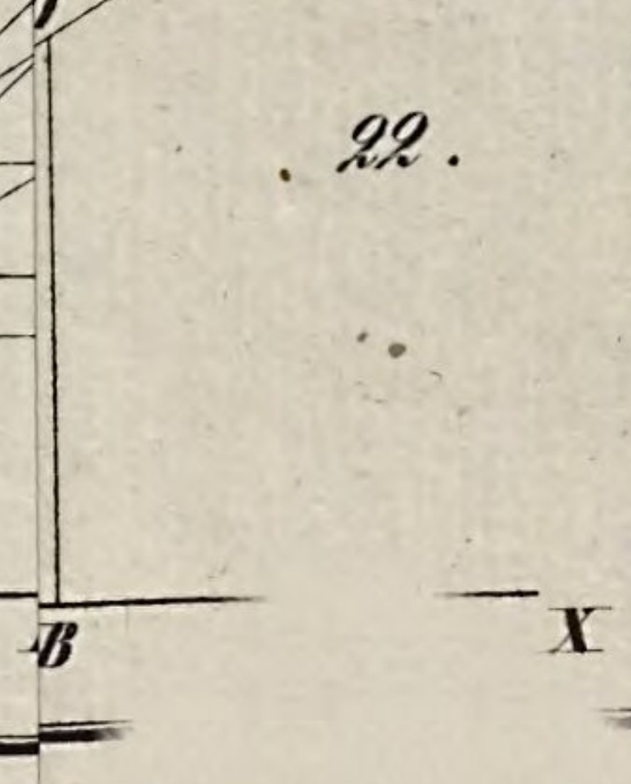

t
V'
N
S
O
U
Q
W
X
B
a
K
G
a
a
H
S
F
r
a
TEN
D
A


M
c
y
b
v
x-a
B
D
Z
C
P
E
X
M
N
C
t
D
r
H
G
B

19.


Y
X
M''
O''
M'
N''
M
N'
O
A
P
P'
P''
Y1

22.


D
B
X

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 6

1832

Coburg, Landesbibliothek -- E I 4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942486-2